TOME 12. N° 1 JANVIER 1951

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

Fondé en 1872 par J.-Ch. d'ALMEIDA

ET LE

RADIUM

Fondé en 1904 par Jacques DANNE

PUBLICATION DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE
Subventionnée par la Confédération des Sociétés scientifiques françaises
et le Centre national de la Recherche scientifique

RÉDACTION : 10, rue Vauquelin, Paris (5e). — Téléphone : GOBELINS 11-02.
ADMINISTRATION : 12, place Henri-Bergson, Paris (8e). — Téléphone : LABORDE 23-38.
Compte de Chèques postaux : PARIS 239-87.

SOMMAIRE

Prix de l'abonnement annuel pour 1951 :
FRANCE et UNION FRANÇAISE : 2000 francs; ETRANGER : 12 dollars ou valeur correspondante en francs.
PRIX DU NUMÉRO : 225 francs (*pour la vente en France*).

TOME 12. N° 1. JANVIER 1951.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

LES SPECTROGRAPHES β A LENTILLES ÉLECTRONIQUES. (THÉORIE UNIFIÉE DES TYPES CLASSIQUES : UN NOUVEL APPAREIL). II.

Par P. GRIVET.
Professeur de Radioélectricité à l'Université de Paris.

A. — Spectrographie à champ uniforme.

En appliquant notre théorie au cas du champ uniforme nous pourrons apprécier ses limites puisqu'on connaît une théorie rigoureuse [7, 8].

1. Trajectoires. Coefficients d'aberration. — L'équation rigoureuse de la trajectoire dans le méridien mobile est

$$r = D \sin\alpha \sin\left(\frac{z}{D\cos\alpha}\right), \tag{95}$$

ce qui donne pour distance de la source à son image de Gauss

$$AA' = L = \pi D, \tag{96}$$

en définissant ainsi une longueur conventionnelle L pour le spectrographe. Le développement de r en α, pour $z = \pi D$ donne, comme $G = -1$:

$$C_s = \frac{L}{2} = \pi \frac{D}{2}. \tag{97}$$

La variation de D, pour une variation de potentiel $\delta\varphi$ fournit

$$C_c = \frac{L}{2} = \pi \frac{D}{2}. \tag{98}$$

Le coefficient de coma est nul lorsque le diaphragme d'ouverture est dans le plan médian de l'appareil. Enfin, en dérivant (95) on voit facilement que

$$\operatorname{tg}\theta = -\alpha - \frac{\alpha^3}{3}, \tag{99}$$

si bien que $G\mu = -1$. Remarquons en passant que $G = -1$ parce que nous nous sommes placés dans le méridien mobile et il n'y a là rien de contradictoire avec l'assertion courante $G = 1$ qui est valable dans un système d'axes fixe, car la rotation du plan méridien mobile entre objet et image est de 180°.

2. Position, grandeur, épaisseur du cercle de focalisation. — Les formules (17), (18) et (21) deviennent ici :

$$\frac{z_R}{D} = 4{,}712 \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}, \tag{100}$$

$$\frac{R}{D} = 1{,}571 \frac{\alpha^3}{1+\alpha^2}, \tag{101}$$

$$\frac{\delta R}{D} = 4{,}712 \frac{\alpha\varepsilon^2}{1+\alpha^2}. \tag{102}$$

En maintenant le dénominateur dans ces formules, on sort du troisième ordre, et l'on applique une correction du cinquième ordre qui n'est que partielle puisqu'on n'a pas tenu compte au départ des aberrations du cinquième ordre. Cette correction est néanmoins heureuse comme nous le montrera l'exemple de $\alpha = 30°$, qui est à la limite du domaine de validité de nos formules. On trouve

		Sans dénominateur.	Avec dénominateur.	Valeur exacte.
$\alpha = 30°$	$\frac{z_R}{D}$	1,29	1,02	1,04
	$\frac{R}{D}$	0,39	0,31	0,317
	$\frac{\delta R}{D}$	2,5	1,95	2,22

3. **Pouvoir séparateur et clarté.** — *a.* SOURCE PONCTUELLE. — Les formules (70), (97) et (98) donnent

$$P = \frac{2}{3}\varepsilon^2, \qquad (103)$$

alors que la valeur exacte donnée par Persico est

$$P_1 = \frac{2}{\varepsilon^2}\Gamma(\alpha), \qquad (104)$$

avec

$$\Gamma(\alpha) = 3 + \pi\left(\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{3} + \ldots\right). \qquad (105)$$

L'erreur relative sur P atteint 23 pour 100 pour $\alpha = 33°$ et 55 pour 100 pour $\alpha = 42°20'$; notre formule ne donne plus alors qu'un ordre de grandeur.

b. SOURCE ÉTENDUE. — La correction principale de source, nous fait passer de P_1 à $P'_1 = \frac{P_1}{5}$ ce qui est en très bon accord avec la formule (22) de Persico, si l'on remarque que son rapport $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ reste voisin de l'unité quel que soit α (ceci apparaît sur sa figure 2). La correction secondaire est aussi en accord avec le résultat de Persico [sa formule (35)] pour les valeurs faibles de α si l'on prend

$$\chi = \frac{1}{\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi}{2\cos\alpha}}, \qquad (106)$$

ce qui résulte finalement de (81).

Mais aux valeurs élevées de α la comparaison devient difficile car la valeur de χ dépend d'une manière critique de la position du diaphragme. Celle que nous avons choisie $z_D = \pi\frac{D}{2}$ est alors différente de celle choisie par Persico $z_D = \pi D \cos\frac{\alpha}{2}$ et devient inutilisable aux grands angles : en effet, l'anneau de focalisation se trouve dans le plan du diaphragme dès que α atteint la valeur de 42° ce qui amène la correction du premier ordre à une valeur infinie. Mais la variation de la correction est très rapide aux environs de cet angle et si par exemple on choisit $\varepsilon = 0{,}2$ le facteur correctif est 0,5 pour $\alpha = 40°$, 0,71 pour 38° et 0,83 pour $\alpha = 35°$.

4. **Consommation de courant.** — Le champ uniforme peut être produit par un solénoïde et Witcher [9] a montré expérimentalement qu'avec une bobine 1,5 fois plus longue seulement que la distance entre la source et le récepteur on pouvait obtenir un champ uniforme à mieux que 1 pour 100 près en éliminant l'effet des bouts par des bobines de compensation très simples. Si l'on fait abstraction du courant consommé par ces dernières, la densité linéaire de courant sur la bobine est donnée par la formule du solénoïde

$$n_i = \frac{5{,}366\sqrt{\varphi(1 + 0{,}979 \cdot 10^{-6}\varphi)}}{D} \quad (\text{A, V, m}), \qquad (107)$$

$$n_i = \frac{1{,}5915(H\rho)}{D} \quad (\text{A, gauss, cm}), \qquad (108)$$

ce qui donne pour $L = 1\,\text{m}$, $D = 0{,}318$, $\varphi = 1$ MV, $n_i = 23$ At : mm. Nous aurons là un repère commode pour apprécier la consommation de courant des autres appareils.

B. — Bobine courte unique.

1. **Champs.** — Lyle [30] a étudié en détail le champ des bobines courtes en 1902 et donné des formules très simples pour représenter le champ suivant leur axe.

a. GORGE DE SECTION CARRÉE. — La loi de répartition le long de l'axe de la composante longitudinale

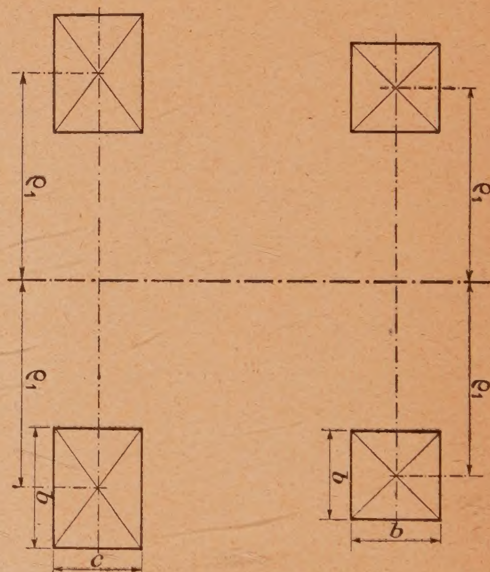


Fig. 21.

du champ, B_z, est très sensiblement la même que si elle était produite par un courant circulaire filiforme unique, de même intensité i, de même axe et situé dans le plan de symétrie de la bobine; son rayon est

$$\rho_2 = \rho_1\left(1 + \frac{b^2}{24\rho_1^2}\right), \qquad (109)$$

ρ_1 est le rayon moyen de la bobine (*fig.* 21), b le côté du carré de gorge. Nous appellerons dans la suite ρ_2 le rayon moyen corrigé.

b. GORGE A SECTION RECTANGULAIRE. — Nous supposerons de plus que l'épaisseur radiale b de la bobine est supérieure à sa largeur axiale c, alors la loi pour B_z est la même que si le champ était

produit par deux courants circulaires coaxiaux et coplanaires d'intensité $\frac{i}{2}$ et de rayons $\rho_2 + e$ et $\rho_2 - e$ avec

$$\rho_2 = \rho_1\left(1 + \frac{c^2}{24\rho_1^2}\right), \tag{110}$$

$$e^2 = \frac{b^2 - c^2}{12}. \tag{111}$$

On peut trouver dans Lyle, d'autres formules couvrant les autres cas possibles; il est inutile de les rappeler ici, les formes précédentes étant les seules utilisées jusqu'à présent.

2. **Modèle de Glaser.** — Le champ d'un courant circulaire de rayon ρ_2 sur son axe est donné par la formule

$$B = \frac{\frac{\mu_0 i}{2\rho_2}}{\left[1 + \left(\frac{z}{\rho^2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}}. \tag{112}$$

Cette loi se prête mal au calcul des propriétés optiques et au contraire, la loi

$$B = \frac{B_c}{\left[1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^{-1}} \tag{113}$$

se prête à des calculs très simples comme W. Glaser [1] l'a montré en détail. Nous chercherons donc à représenter la loi réelle, par une cloche de Glaser. Nous disposons de deux paramètres B_c et a, et nous pourrions essayer de les ajuster, pour que les deux formes de champ fournissent les mêmes valeurs pour deux caractéristiques optiques. Mais dans le cas réel les calculs sont assez compliqués et par raison de simplicité nous prendrons pour valeur du champ au centre, la valeur réelle.

a. Gorge carrée. — On a donc d'abord

$$B_c = \frac{\mu_0 N i}{2\rho_2} \quad (\text{weber : m}^2, \text{ At, m}). \tag{114}$$

Pour ajuster a, on peut imposer aux deux courbes d'avoir :

1° même courbure en leur sommet; on trouve alors avec K. Siegbahn [19] :

$$\rho_2 = 1{,}225\, a;$$

2° même largeur à mi-hauteur; on obtient

$$\rho_2 = 1{,}305\, a;$$

3° même distance focale lorsque la lentille est mince (*cf.* Appendice II) :

$$\rho_2 = 1{,}333\, a; \tag{115}$$

4° même distance focale lorsque la lentille est très convergente

$$\rho_2 = 1{,}379\, a.$$

Ces deux dernières évaluations montrent que le coefficient varie très légèrement avec la convergence et nous utiliserons dans la suite la valeur donnée par (115) dans tous les calculs de première approximation.

b. Gorge rectangulaire. — On a d'abord

$$B_c = \frac{\mu_0 i}{2\rho_2}\left(1 - \frac{e^2}{\rho_2^2}\right)^{-1}, \tag{116}$$

le paramètre a, est ensuite déterminé par

$$\rho_2 = 1{,}33\, a\left[1 + 3{,}84\left(\frac{e}{\rho_2}\right)^2\right] \tag{117}$$

qu'on obtient de manière quelque peu empirique, en cherchant à donner aux courbes en cloche la même largeur, puis en remplaçant le premier coefficient 1,3 par 1,33 pour se raccorder à la valeur choisie au paragraphe précédent lorsque $e = 0$.

3. **Images de Gauss et coefficients d'aberration.** — *a*. Trajectoire de Gauss. — Si l'on pose

$$a = KD \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{1 + K^2} \tag{118}$$

pour abréger les notations, l'équation paramétrique des trajectoires est, suivant les notations originales de Glaser,

$$\frac{z}{a} = \cot g\, \varphi, \qquad \frac{r}{a} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\omega \cos \frac{\pi}{2\omega}} \frac{\cos\omega\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\varphi}, \tag{119}$$

avec $0 < \varphi < \pi$.

On en tire facilement la distance de la source à son image de Gauss

$$L = AA' = 2a \operatorname{tg}\frac{\pi}{2\omega} = 2a \operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{D}\right)^2}} \tag{120}$$

et le rayon du diaphragme d'ouverture, lorsqu'on le place dans le plan médian de la bobine. C'est aussi la valeur maxima de l'écart à l'axe des trajectoires, lorsque l'approximation du premier ordre est suffisante

$$r_D = \frac{a \operatorname{tg}\alpha}{\omega \cos \frac{\pi}{2\omega}}. \tag{121}$$

b. Coefficients d'aberration. — Les formules de Glaser donnent, en employant le paramètre ω

$$\frac{C_s}{a} = \frac{1}{4}\left(\pi \frac{\omega^2 - 1}{\omega^3} + \frac{4\omega^2 - 7}{4\omega^2 - 1} \sin\frac{\pi}{\omega}\right) \frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{2\omega}}, \tag{122}$$

$$\frac{C_c}{a} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega^2 - 1}{\omega^3} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2\omega}}. \tag{123}$$

Le coma est nul lorsque le diaphragme d'ouverture est dans le plan médian de l'appareil.

4. **Géométrie du spectrographe à bobine courte.** — *a*. Le modèle et l'expérience. — Dans les appareils décrits jusquici dans la littérature [13, 15], on ignore l'anneau de Witcher et l'on utilise seulement un trou pour séparer les énergies; dans ces conditions, la formule (120) donne la longueur de l'appareil. L'approximation est satisfaisante, comme on peut en juger sur l'exemple suivant. Selon la référence [15], Deutsch, Elliot et Evans, trouvent expérimentalement la loi de sélection $\left(\frac{Ni}{H\rho}\right)^2 = 8{,}07$ en fixant la distance de la source au trou récepteur à un mètre ($L = 1$). Or notre formule s'écrit

$$(H\rho) = 0{,}31416\,\frac{Ni\,D_c}{\rho_2}. \tag{124}$$

La bobine ayant 17,6 cm de rayon moyen et un carré de gorge de 16 cm de côté, on a, d'après (109), $\rho_2 = 18{,}1$ puis d'après (15) $a = 13{,}6$; et comme (124) fait correspondre $D_c = 20{,}37$ à la loi de sélection observée on tire finalement de (120), $L = 100$ cm, en excellent accord avec l'expérience.

b. Longueur et ouverture. — Dans un appareil donné et pour une raie déterminée, on peut toujours réduire la longueur en augmentant le courant, ce qui fait croître K. Mais on est limité rapidement par des raisons pratiques car pour éviter des effets parasites dus surtout au rayonnement γ, il est bon qu'il y ait une distance notable de l'ordre du mètre entre source et récepteur. D'autre part, lorsque L est inférieur à $2\,a$, c'est-à-dire à peu près au diamètre moyen ($\rho_2 = 1{,}33\,a$) de la bobine, le champ est presque uniforme tout le long du trajet entre source et récepteur et ce cas n'apporte rien de neuf non plus au point de vue théorique; on vérifie d'ailleurs que dans cette région C_s et C_c prennent la valeur $\frac{L}{2}$ caractéristique du champ uniforme. On peut donc limiter l'étude à

$$L > 2a. \qquad K^2 < 3, \qquad \omega < 2. \tag{125}$$

D'un autre côté, les longueurs extrêmes, c'est-à-dire les valeurs de K^2 voisines de zéro (ou de ω voisines de 1), ne sont pas utilisées non plus, car elles mènent à des ouvertures trop petites c'est-à-dire à une luminosité trop faible.

En effet, le cercle de gorge de la bobine fixe le maximum du rayon qu'on peut donner au diaphragme; cette valeur est de l'ordre de la moitié du rayon moyen du bobinage, lorsqu'on utilise un trou sélecteur, de l'ordre du tiers si l'on se sert de l'anneau de Witcher $\left(\text{avec alors } \varepsilon = \frac{\alpha}{6}\right)$.

Pour simplifier les formules nous choisirons ici $r_D = a$, c'est-à-dire $\frac{\rho_2}{1{,}33}$, dans ces conditions la formule (121) donne

$$\operatorname{tg}\alpha = \omega \cos\frac{\pi}{2\omega}, \tag{126}$$

l'ouverture angulaire ne peut pas dépasser 32°24′ lorsqu'on adopte la longueur $L = 4\,a$, c'est-à-dire $K^2 = 1{,}013$, et le tableau I montre bien qu'on fixe là une proportion raisonnable, entre la longueur L de l'appareil et le diamètre $2{,}66\,a$ de sa bobine.

Tableau I.

k^2.	$\frac{L}{\rho_2}$.	α_{max}.	$\frac{B_c}{B_0}$.	$\frac{Ni}{N_0 i_0}$.	$\frac{P}{P_0}$.	$\frac{P'}{P'_0}$.	$\frac{C_c}{a}$.	$\frac{C_s}{a}$.	$\frac{L}{a}$.	$\frac{R}{R_0} = \frac{\delta R}{\delta R_0} = \frac{z_R}{z_{R_0}}$.
0,25	9	10° 26′	1,38	0,20	0,076	0,965	10,35	135,41	11,973	22,62
0,5	5,07	18 49	1,23	0,32	0,183	0,926	5,297	28,88	6,751	8,56
0,75	3,73	26 20	1,17	0,42	0,28	1,096	3,636	12,982	4,958	5,24
1	3,03	32 19	1,133	0,50	0,36	1,107	2,818	7,876	4,035	3,90
1,25	2,6	36 52	1,11	0,57	0,42	1,109	2,327	5,52	3,464	3,19
1,5	2,31	40 47	1,093	0,63	0,47	1,108	2,003	4,225	3,072	2,75
2	1,92	46 52	1,088	0,75	0,56	1,104	1,593	2,862	2,557	2,24
2,5	1,68	51 19	1,060	0,84	0,62	1,072	1,344	2,177	2,229	1,95
3	1,5	54 44	1,050	0,93	0,65	1,050	1,178	1,778	2	1,78

c. Consommation de courant. — Nous prendrons comme point de comparaison le spectrographe à champ uniforme, de même longueur L; cette condition nous donne pour B_c, champ au centre de la bobine courte, B_0 étant le champ uniforme :

$$\frac{B_c}{B_0} = \left[\frac{2}{\pi} K \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{1+K^2}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{127}$$

La consommation de courant reste du même ordre que dans l'appareil à champ uniforme et comme la longueur de fil est souvent moindre, la consommation d'énergie peut être inférieure. La formule suivante précise ce bénéfice, en donnant le rapport du nombre total d'ampères-tours Ni dans l'un et l'autre cas; on a admis que le spectrographe à champ uniforme possédait un enroulement de longueur $1{,}5\,L$ comme dans la réalisation de Witcher :

$$\frac{Ni}{N_0 i_0} = \frac{2\rho_2}{1{,}5\,L}\,\frac{B_c}{B_0} = 0{,}565\,K. \tag{128}$$

en particulier pour $L = 4\,a$, $K^2 = 1{,}013$, $\dfrac{Ni}{N_0 i_0} = 0{,}5$ en très bon accord avec le résultat expérimental ([15], p. 195).

On peut en déduire une formule simple pour l'économie de puissance; en appelant W et W_0 les puissances dans les deux spectrographes, ρ_2 et ρ_0 le rayon moyen des enroulements, Σ et Σ_0 la surface de la section des enroulements comptée en surface de cuivre, on a

$$\frac{W}{W_0} = \frac{\rho_2}{\rho_0}\frac{\Sigma}{\Sigma_0}\left(\frac{Ni}{N_0 i_0}\right)^2, \tag{129}$$

ce qui s'écrit approximativement si ρ_2 est peu différent de ρ_0

$$\frac{W}{W_0} = \frac{M}{M_0}\left(\frac{Ni}{N_0 i_0}\right)^2, \tag{130}$$

en introduisant les poids de cuivre des deux enroulements M et M_0. En particulier pour le spectrographe type, de longueur $4\,a$, on a

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{4}\frac{M}{M_0}, \tag{131}$$

ce qui montre qu'en adoptant *la bobine courte* on peut faire, *soit une économie de cuivre, soit une économie de puissance mais non les deux à la fois.*

La formule (130) met en bon accord les résultats des références [15] et [9], formules (28) de la première, indique une consommation de 3,15 kW pour focaliser les rayons β de 4,44 MV, tandis qu'on peut évaluer approximativement qu'il en faut 15 dans les conditions de la deuxième. Notre formule en laisserait prévoir 10,5; ce résultat est encore satisfaisant vu les approximations grossières que nous avons faites dans le calcul des résistances.

5. **Pouvoir séparateur.** — Le pouvoir séparateur de l'appareil est en général inférieur à celui du spectrographe à champ uniforme de même longueur et de même luminosité lorsqu'on emploie une source d'étendue négligeable, comme le montre le tableau et en particulier dans les conditions normales on a $P = 0{,}36\ P_0$. Lorsque la source est étendue, la comparaison est moins défavorable car si le coefficient d'aberration sphérique plus grand entraîne une plus grande largeur de la figure de focalisation, il autorise aussi à employer une source de plus grand rayon et dans les conditions normales on a $P' = P'_0$; le tableau I indique également les valeurs de P' pour différentes valeurs de K.

Toutes les valeurs indiquées au tableau I sont relatives à l'emploi d'un diaphragme sélecteur annulaire dont l'intérêt pour ce genre d'appareil vient d'être souligné dans des expériences récentes [31, 32].

Les colonnes du tableau I relatives à P' sont édifiées au moyen des formules (86) et (91) car on y compare le spectrographe à bobine courte à l'appareil à champ uniforme présentant même distance entre la source et son image de Gauss (même L); on a alors

$$\frac{P'}{P'_0} = 2^{\frac{4}{5}}\left(\frac{C_c}{a}\right)\left(\frac{C_s}{a}\right)^{-\frac{1}{5}}\left(\frac{L}{a}\right)^{-\frac{4}{5}}, \tag{132}$$

rapport qui tend naturellement vers 1 lorsque K augmente et que les conditions régnant dans les deux appareils se rapprochent.

Le tableau montre qu'avec ce type d'appareil, on peut réaliser soit une économie de cuivre, soit une économie de puissance, mais *l'appareil est mal adapté aux recherches nécessitant un très grand pouvoir séparateur* obtenu avec une *source de faible dimension* aux dépens de la luminosité; au contraire, dans les cas où l'on doit travailler *avec une source étendue* l'influence de la forte aberration sphérique disparaît et *l'on arrive aux mêmes caractéristiques qu'avec le prototype à champ uniforme* avec plus de simplicité et de commodité dans la construction.

6. **Les réalisations anciennes.** — Les spectrographes décrits en détail dans la littérature et en particulier, celui de la référence [15] emploient un trou sélecteur conjugué à un faisceau conique creux, cas différent de ceux que nous avons envisagés jusqu'à présent. Mais on peut le traiter facilement comme dans le premier calcul schématique qui nous avait amené à la formule (8). On a maintenant

$$\rho_s = 2\,C_s\,\alpha^2\,\varepsilon(1 - \mu\alpha^2), \tag{133}$$

$$P = \frac{C_c}{C_s\,\alpha^2}. \tag{134}$$

Pour une source étendue, nous avons un raisonnement analogue à celui qui nous a menés à la formule (75); ρ_s est proportionnel à $\alpha^2\varepsilon$ et l'étendue de la source n'agit que sur le bord extérieur du cercle de confusion; ces deux changements se compensent et l'on retrouve la formule (74)

$$\rho_m = 2\,\rho_s$$

et en conséquence la formule (91) pour P'.

Le tableau II montre l'accord entre les valeurs prévues par la théorie à partir des dimensions géométriques de l'appareil de Deutsch, Elliot et Evans, et celles observées expérimentalement. Lorsqu'on utilise des rayons de faible énergie, les valeurs de K^2 sont faibles et les lentilles présentent alors une aberration sphérique très importante, dont il faut tenir compte dans le calcul de L. C'est ainsi que pour une réalisation récente de Jensen, Jackson et Pratt [33] on a les dimensions et valeurs suivantes : pour une bobine très étroite $\rho_1 = 19{,}1$ cm; $\rho_2 = 19{,}32$ cm; $\dfrac{e_2}{\rho_2^2} = 0{,}053$; d'où, d'après (117),

$a = 12{,}06$ cm et pour la raie F du Th B ($H\rho = 1385$) on a $D_c = 22{,}27$ cm et $K^2 = 0{,}293$. On calcule alors à l'approximation de Gauss une distance source-récepteur erronée : $L' = 125{,}6$ cm; mais il faut lui retrancher une correction d'aberration sphérique $\Delta L = C_s \alpha^2 = 15{,}6$ cm, avec les diaphragmes employés ($r_D = 6{,}9$ cm, $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}118$; $C_s = 94$ cm) ce qui donne finalement $L = 110$ cm au lieu de la valeur expérimentale $L = 100$ cm. En deuxième approximation, on améliorerait grandement l'accord avec l'expérience, en répartissant également la correction sur la position de l'objet et celle de l'image : on rétablirait ainsi pour le modèle une symétrie qui caractérise l'expérience.

Tableau II.

Cas.	Bobines. Gorge (cm).	ρ_1 (cm).	ρ_2 (cm).	Trajectoires. L (cm).	a (cm).	K^2.	α (rad).	ε (rad).
B............	16 × 10,6	20,3	23,75	100	17,86	0,636	0,147	0,029
E............	16 × 5,3	22,9	24,5	100	18,42	0,664	0,164	0,012

Cas.	Pouvoir séparateur. $\frac{C_c}{a}$.	$\frac{C_s}{a}$.	P ($r = 0$).	ρ_s (mm).	s (mm).	ρ'_s (mm).	P' (calculé).	P' (observé).
B............	4,5	21	500	4,64	2	6,64	34,7	31,3
E............	4,5	21	109	2,5	2	4,65	60,2	59

C. — Spectrographie de K. Siegbahn.

1. **Champ magnétique.** — La répartition de champ préconisée par K. Siegbahn, pour réduire l'aberration sphérique peut être obtenue, soit par deux bobines courtes sans fer [34], soit par deux bobines cuirassées. Dans l'un et l'autre cas, on peut représenter la variation du champ sur l'axe avec une très bonne approximation, par deux cloches de Glaser, mais c'est dans la première éventualité seulement qu'on pourra relier les paramètres de la cloche B_c et a, aux dimensions de la bobine et au courant qui la parcourt par les formules (112) et (115); quand on emploie du fer on en est réduit à déterminer ces paramètres par des mesures dont on pourrait sans doute représenter les résultats par des formules analogues à (112) et (115).

La suggestion de K. Siegbahn est surtout intéressante lorsque la courbe de champ est nettement creusée entre les bobines; sinon l'appareil se rapproche beaucoup du champ uniforme; nous laisserons de côté les cas de transition, pour lesquels nos formules deviendraient très compliquées et nous supposerons que la distance des centres des deux bobines l, est toujours supérieure à $4\,a$. Dans ces conditions, la courbe représentant B_z peut être considérée avec une précision suffisante comme deux cloches de Glaser accolées, sans interaction : de chaque côté du plan médian du spectrographe, nous admettons que le champ est essentiellement produit par une seule bobine, en négligeant l'action de l'autre plus éloignée. D'autre part, nous n'aurons pas à bobine examiner le cas où les bobines sont très éloignées l'une de l'autre et nous supposerons toujours que $l < 6a$; en effet, si nous écartons davantage les bobines, nous augmenterons simplement la longueur de la zone où ne règne pratiquement aucun champ au milieu du spectrographe et nous allongeons seulement la partie rectiligne et parallèle à l'axe des rayons qui n'est d'aucune utilité dans la focalisation, et nous augmentons ainsi sans aucun bénéfice, l'encombrement du spectrographe. Nous supposerons donc

$$4a \leq l \leq 6a.$$

Nous calculerons surtout les propriétés dans les deux cas extrêmes $l = 4\,a$ et $l = 6\,a$; elles sont, nous le verrons, très voisines, ce qui confirme nos prévisions qualitatives et en conclusion, il semble raisonnable de prendre $l = 4\,a$ comme proportion type du spectrographe de K. Siegbahn.

Si la source est placée au centre de la première bobine, le paramètre K^2 de la lentille se trouve alors fixé très sensiblement à la valeur 3 (ou en d'autres termes ω à la valeur 2)

$$\frac{z}{a} = \operatorname{cotg} \varphi, \qquad \frac{z}{a} = \frac{\sin \omega \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \varphi} \tag{135}$$

chemine parallèlement à l'axe, dans le plan médian de l'appareil; on obtient une équation en ω, dont les racines sont données au tableau III pour différentes valeurs de l.

Tableau III.

$\frac{l}{a}$....	12	10	8	6	5	4	3	2
ω....	2	2	2,02	2,05	2,07	2,1	2,17	2,48

2. **Géométrie, consommation, pouvoir séparateur.** — *a*. Longueur. — Dans le cas où la source est placée au centre des bobines, la distance L est égale à la distance entre les bobines

$$l = L.$$

TABLEAU IV.

l.	k^2.	$\frac{L}{\rho_2}$.	$\frac{B_0}{B_c}$.	$\frac{Ni}{N_0 i_0}$.	$\frac{P}{P_0}$.	$\frac{P'}{P'_0}$.	$\frac{C_c}{a}$.	$\frac{C_s}{a}$.	$\frac{L}{a}$.	$\frac{R}{R_0}=\frac{\delta R}{\delta R_0}=\frac{z_R}{z_{R_0}}$.
$4a$	0,8	4,5	1,3	0,39	1,01	0,738	2,024	2	5,94	0,67
	3	3	1,485	0,66	2	0,759	1,178	0,588	4	0,29
	10	1,9	1,636	1,09	2,5	1,184	1,306	0,522	2,56	0,41
$6a$	0,8	6	1,503	0,34	1,01	0,585	–	–	7,94	0,50
	3	4,5	1,864	0,55	2	0,546	–	–	6	0,20
	10	3,4	2,166	0,82	2,5	0,775	–	–	4,56	0,23

Nous envisagerons également deux autres dispositions (*fig.* 22). L'une est moins favorable puisque

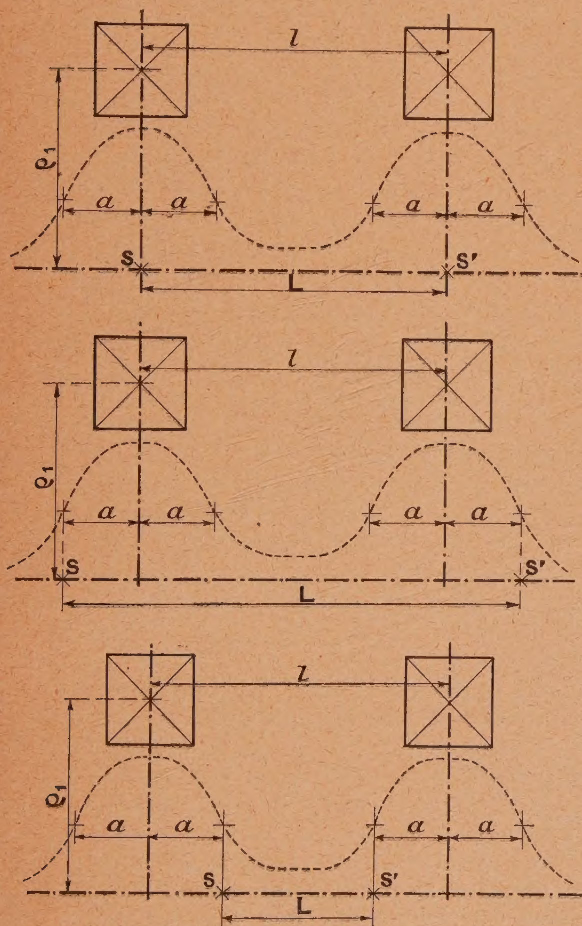


Fig. 22.

la courbe du champ est moins creuse, car la source est située avant la première lentille à une distance 0,97 a de son centre; ce qui correspond à $K^2 = 0{,}8$ ($\omega = 1{,}342$) et à $L = l + 1{,}96\ a$. L'autre est meilleure car la source est située à une distance 0,719 a après le centre de la première lentille ce qui correspond à $K^2 = 10$ ($\omega = 3{,}317$) et $L = l - 1{,}44\ a$.

Le tableau IV donne ces longueurs en fonction du rayon des bobines dans quelques cas typiques. Toutes ces propriétés se déduisent facilement des équations données par W. Glaser dans la référence [1] et en particulier du tableau qu'il donne à la page 302 de son Mémoire.

b. ABERRATIONS. — Ce tableau fournit également les constantes C_c et C_s du spectrographe, qui, par raison de symétrie valent le double des constantes C_c et C_s de chaque lentille composante, lorsque l'objet est au foyer.

Nous avons porté les valeurs globales relatives à l'appareil entier dans le tableau IV. Enfin, le coma disparaît lorsque le diaphragme d'ouverture est dans le plan médian de l'appareil; alors la constante μ est égale à $\frac{1}{3} - \frac{2C_s}{a}$, ce qui résulte des formules de l'Appendice. Le premier modèle de spectrographe dû à Siegbahn semble maintenant remplacé avantageusement par un deuxième, celui de Siegbahn et Slätis qui permet de travailler à ouverture plus grande. Aussi nous contenterons-nous de calculer ses propriétés en première approximation, sans faire intervenir les termes correctifs comportant μ.

c. OUVERTURE. — L'ouverture des faisceaux n'est limitée par aucune servitude; au contraire, la disposition des bobines est très favorable à l'emploi de grandes ouvertures, car il n'y a pas d'enroulement dans la zone où les rayons s'écartent le plus de l'axe. Cette circonstance est également très favorable à notre théorie car c'est au voisinage des filets de courant que les aberrations d'ordre supérieur que nous avons négligées se font le plus sentir.

d. CONSOMMATION. — Le champ au centre de chaque bobine et leur consommation individuelle de courant, suit les lois (114) et (124) et sont données au Tableau IV.

e. POUVOIR SÉPARATEUR. — Le pouvoir séparateur pour une source ponctuelle P devient supérieur à celui du champ uniforme; deux fois supérieur à consommation de courant presque égale, 2,5 fois meilleur pour une consommation double.

Le pouvoir séparateur pour une source étendue est calculé par la formule (129); il reste sensiblement égal à celui du champ uniforme. Le tableau montre que la valeur $L = 4\,a$ est dans l'ensemble la plus recommandable et sa dernière colonne donne les éléments géométriques caractéristiques R, z_R, $\delta_S R$ rapportés à ceux de l'appareil à champ uniforme où la source et le récepteur seraient à la même distance L, pour $L = 4\,a$ et $L = 6\,a$.

3. **Confrontation avec l'expérience.** — K. Siegbahn a employé, dans ses mesures, un trou et non une fente annulaire. On ne peut donc pas comparer ses résultats à ceux des tableaux. Ils sont au contraire justiciables des formules (129), (131) et (132) et il y a un accord très satisfaisant entre les prévisions et les résultats de l'expérience.

1° Le cas B de Siegbahn [20] correspond au réglage optimum pour une source étendue. On a en effet

$$L = 50\text{ cm}, \qquad \alpha = 20^{\circ}35, \qquad \varepsilon = 3^{\circ}9$$

et l'on calcule pour le disque de confusion : $\rho = 1$ mm; la source ayant 4 mm de diamètre est donc bien choisie et $P' = \frac{P}{5}$ à partir des valeurs de C_s, C_c du tableau précédent, et, en se plaçant dans les conditions moyennes $L = 4\,a$, on calcule $P' = 20$, tandis que Siegbahn mesure $P' = 23$. Dans le cas qu'il nomme A, l'auteur suédois réduit l'angle solide du faisceau en passant à $\alpha = 22^{\circ}12'$, $\varepsilon = 1^{\circ}32'$, mais sans réduire le diamètre de la source ni du trou sélecteur si bien que le spectrographe n'est plus dans les conditions optima; on calcule alors $\rho_s = 0{,}6$ mm et $P' = \frac{P}{6{,}8} = 29$ alors que l'on mesure 35. Les écarts entre la théorie et l'expérience s'expliquent facilement par l'arbitraire du choix $L = 4\,a$ et l'on remarque que l'effet du rayon de la source est prévu avec une très bonne précision puisque le rapport des valeurs théoriques : $\frac{29}{10}$ est très voisin du nombre expérimental $\frac{35}{23}$.

Siegbahn a également comparé la luminosité de son spectrographe à celui d'un appareil à bobine courte de même pouvoir séparateur; les données ne sont pas suffisantes pour permettre une comparaison serrée, mais si l'on peut supposer que les deux appareils sont réglés au mieux avec les mêmes ouvertures angulaires, on trouve alors d'après la formule (91) que les luminosités varient en raison inverse des produits $C_c^{5/2}\,C_s^{-1/2}$ qui leur sont relatifs et l'on prévoit alors un rapport de 2,45 au lieu de 2 qui fut observé, ce qui peut être considéré comme un accord satisfaisant.

D. — **Spectrographe de Siegbahn et Slätis.**

1. **Champ et cœfficients caractéristiques.** — Le spectrographe précédent offre la possibilité d'utiliser de très grands angles d'émission, car sa partie centrale, où le faisceau électronique est large, n'est encombrée d'aucun enroulement. Il échappe ainsi à la servitude qui frappe ordinairement l'utilisation de bobines courtes avec lesquelles les rayons doivent traverser une gorge dont le rayon est fixé par les lois de l'Optique électronique à une valeur trop étroite.

Dans leur nouvel appareil [23], les auteurs suédois ont donc gardé la même répartition de champ que dans l'ancien et la représentation que nous en avons donnée au Chapitre précédent reste valable ici. D'autre part, la valeur de l'angle est choisie de manière à ce que l'anneau de focalisation vienne se placer dans le plan médian de l'appareil. Dans ces conditions, seule la première moitié est active dans la séparation des énergies et notre théorie est encore valable puisque les rayons sont pratiquement sortis de son champ lorsqu'ils forment l'anneau; ils sont alors rectilignes et le demeurent jusqu'au plan de l'image de Gauss puisqu'elle est virtuelle.

Les coefficients C_c et C_s sont ceux qui caractérisent la première lentille, pour un objet placé à son foyer, c'est-à-dire la moitié de ceux qui figurent dans les colonnes 5 et 6 du tableau IV; elles obéissent aux lois

$$\frac{C_c}{a} = \frac{\pi(\omega^2 - 1)}{2\omega^3}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{\omega}}, \tag{136}$$

$$\frac{C_s}{a} = \left(\frac{\pi}{4}\,\frac{\omega^2 - 1}{\omega^3} - \frac{1}{8}\,\frac{4\omega^2 - 7}{4\omega^2 - 1}\sin\frac{2\pi}{\omega}\right)\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{\omega}} \tag{137}$$

données et calculées par W. Glaser [1].

Nous verrons en effet que la source est toujours placée assez près du foyer de la première lentille, pour qu'on puisse attribuer ces valeurs simples aux coefficients C_s et C_c qui ne varient que lentement avec la position de l'objet.

Il est avantageux de placer le diaphragme d'ouverture dans la position qui donne un coma nul. Celle-ci est définie par une équation donnée par Glaser et Lammel [2]. La source étant au foyer, elle revêt la forme suivante :

$$\operatorname{tg}\omega\varphi_d = \frac{1}{3}\left[\pi\,\frac{(\omega^2 - 1)(4\omega^2 - 1)}{\omega^2}\,\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}} - (4\omega^2 - 7)\,\omega\cos\frac{\pi}{\omega}\right]\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}} \tag{138}$$

et jointe à la première des équations (134) donne la position du diaphragme; on trouvera cette distance z_d

calculée pour un choix de valeurs de K^2 au tableau V; en particulier pour $K^2 = 3$ ($\omega = 2$) on a $z_d = a$, alors que $L = 4\,a$ pour $\alpha = 43^o$; cet exemple nous montre que ces positions sont utilisables mais qu'elles amènent le diaphragme d'ouverture assez près du diaphragme sélecteur ($z = 2\,a$ pour $K^2 = 3$, $\alpha = 43^o$) ce qui peut avoir l'inconvénient de rendre la correction secondaire de source importante.

Le coefficient μ joue ici un rôle important; nous verrons pour cela qu'il est toujours calculable par la formule simplifiée (14) où nous pouvons même le plus souvent négliger le terme en $\frac{1}{G}$; et il suffit de connaître C_s et f_0; f_0 est donné par la formule de Glaser, tabulée par cet auteur

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}}. \tag{139}$$

TABLEAU V.

K^2......	3	4	5	10
$\frac{z_d}{a}$.....	1,1	1,26	1,41	2

2. **Géométrie.** — *a.* OUVERTURE. — L'utilisation de grandes ouvertures ne sera possible que si la source est bien dégagée des bobines; le choix de G et de K^2 est fixé par cette nécessité.

1° *Choix de K^2.* — La source est voisine du foyer de la première lentille, légèrement à sa droite pour donner une image virtuelle (ce qui est nécessaire puisque u est positif ce qui entraîne G positif, d'après [25]).

Le foyer objet doit donc être au centre de la lentille ($K^2 = 3$), ou, à sa droite ($K^2 > 3$), c'est-à-dire que $K^2 \geq 3$ et l'on vérifie sans peine sur la figure que pour $K^2 = 3$, cas où le foyer est au centre de la lentille et où $f_0 = a$; il est déjà difficile d'employer des angles de l'ordre de 45° avec une bobine nue, à gorge de section carrée : le bobinage est encore gênant si sa largeur $b = \frac{\rho_2}{2}$. il ne laisse passer les rayons que si $b = \frac{\rho_3}{3}$, On sera donc conduit soit à cuirasser de fer les bobines, soit à employer des enroulements rectangulaires, allongés dans le sens radial. Sinon, il faudra employer des valeurs de K^2 élevées, c'est-à-dire décaler la source vers l'intérieur du spectrographe ce qui entraîne une consommation de courant accru et pourrait devenir un inconvénient important aux grandes énergies; ceci limite en pratique les valeurs admissibles de K^2 à : $3 \leq K^2 \leq 10$.

2° *Ouverture.* — K^2 étant choisi, la valeur de G résulte du choix de α d'après la formule (25) qu'on peut écrire ici

$$G = \frac{f_0}{C_s}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha^3}. \tag{140}$$

Le tableau VI donne le quotient $\frac{C_s}{f_0}$ et les valeurs qui en résultent pour G. On obtient un accord remarquable avec les observations de Siegbahn et Slätis; ceux-ci utilisaient un angle voisin de 45° et plaçaient la source au centre de la bobine, mais K^2 devait être assez nettement supérieur à 3 car ils employaient un blindage sur le côté extérieur, ce qui déplace vers l'extérieur le centre de la cloche de Glaser.

TABLEAU VI.

	G.				$\frac{l}{a}$.				$\frac{L}{a}$.			
k^2. α....	30°.	40°.	45°.	50°.	30.	40°.	45°.	50°.	30°.	40°.	45°.	50°.
3.........	12	6,6	5,15	4,2	10,4	5	3,6	2,6	10,4	5	3,6	2,6
4.........	13	7,2	5,6	4,35	11,0	5,2	3,6	2,4	10,7	4,85	3,26	2,1
5.........	16	8,7	6,75	5,3	13,8	6,3	4,3	2,8	13,2	5,7	3,7	2,2
10.........	16,4	9	7	5,32	16	5,43	4,5	2,6	14,6	4	3,1	1,2

	$\frac{R}{a}$.				$\frac{100\,\delta R_s}{a}$ ($\varepsilon = 0,1$).				$\frac{P}{P_0}$.	$\frac{P'}{P'_0}$.			
k^2. α....	30°.	40°.	45°.	50°.	30°.	40°.	45°.	50°.		30°.	40°.	45°.	50°.
3.........	0,5	0,64	0,71	0,77	2,9	2,15	1,9	1,72	2	0,84	0,94	1	1,1
4.........	0,51	0,65	0,71	0,78	2,9	2,2	1,9	1,74	2,16	0,88	1,03	1,16	1,33
5.........	0,52	0,67	0,74	0,80	3	2,24	2	1,80	2,26	0,89	1,07	1,23	1,55
10.........	0,62	0,80	0,87	0,94	3,5	2,65	2,36	2,12	2,50	1	1,6	1,6	2,82

Or la théorie donne, pour $\alpha = 45^o$, des grossissements G allant de 5 ($K^2 = 3$) à 7 ($K^2 = 5$) ce qui place la source très près du foyer, près du centre de la cloche de Glaser, donc encore très près du centre de la bobine.

Les valeurs élevées que l'on obtient pour G légitiment l'usage que nous avons fait de la formule (14) en négligeant les termes en $\frac{1}{G}$ dans l'expression de μ; aux grandes valeurs des angles que l'on emploie

ici, nos calculs doivent tendre plus à la clarté qu'à la précision.

b. Longueur du spectrographe. — Le choix de cette longueur fixe la valeur de G avec précision du fait que l'on s'est imposé de placer l'anneau de focalisation dans le plan médian de l'appareil. Ce n'est pas là une condition arbitraire au contraire, elle assure l'excellence de la focalisation par la deuxième lentille et rend ainsi possible l'usage de compteurs de Geiger minuscules, ce qui entraîne une importante réduction de nombreux effets parasites.

Dans ces conditions, la distance du foyer image de la première lentille au foyer objet de la seconde vaut $2\, Z_{RF}$ ce qui, suivant la formule (30) donne

$$F_i^1 F_0^2 = G f_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right). \qquad (141)$$

On obtient ainsi pour la distance l entre les centres des deux lentilles :

$$l = G f_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + 2 Z_{F_i}, \qquad (142)$$

Z_{F_i} étant l'abscisse du foyer image de la première lentille comptée à partir de son centre et donnée suivant Glaser par

$$\frac{Z_{F_i}}{a} = - \cotg \frac{\pi}{\omega} \qquad (143)$$

Z_{F_i} est négatif dans la gamme de valeur de K^2 qui nous intéresse et qui correspond à $2 \leqq \omega \leqq 3{,}32$.

La source est placée au voisinage de F_0^1 foyer objet de la première lentille, le récepteur au voisinage du foyer image de la deuxième lentille, et en négligeant encore $\frac{f_0}{G}$ devant f_0 on a pour L distance source-récepteur

$$L = G f_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + 4 Z_{F_i}. \qquad (144)$$

Le tableau donne les valeurs des grandeurs L et l que les relations précédentes lient à a, donc au rayon moyen corrigé des bobines ρ_2 (puisque $\rho_2 = 1{,}33\, a$) dès que l'angle α est choisi. Le tableau montre que pour α voisin de 40°, pour laquelle les approximations faites n'amènent pas une trop grande imprécision, les proportions du spectrographe restent à l'intérieur de limites assez étroites lorsque K^2 parcourt l'intervalle 3-10.

c. Dimensions du cercle de focalisation. — Nous avons calculé le rayon du cercle de focalisation et son épaisseur naturelle, lorsque la source est ponctuelle, par les formules (27) et (28); nous avons comparé ces valeurs à celles du spectrographe à champ uniforme fonctionnant avec la même distance source-récepteur et les mêmes angles. On obtient le même rapport pour le rayon de l'anneau et son épaisseur

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\delta_s R}{\delta_s R_0} = G \left(\frac{C_s}{a}\right) \left(\frac{L}{a}\right)^{-1}. \qquad (145)$$

Quant aux champs et aux consommations de courant, les raisonnements que nous avons faits pour l'appareil à bobine courte unique mènent ici à

$$\frac{D_0}{D_c} = \frac{B_c}{B_0} \frac{K}{\pi} \frac{L}{a}, \qquad (146)$$

$$\frac{Ni}{N_0 i_0} = 0{,}565\, K. \qquad (147)$$

Les valeurs numériques correspondantes sont portées au tableau VI. Nous ajouterons seulement que les valeurs de R et de $\delta_s R$ peuvent être écrites sous la forme simple

$$R = f_0 \sin \alpha, \qquad (148)$$

$$\delta_s R = 1{,}5\, R \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}. \qquad (149)$$

3. **Pouvoir séparateur.** — Les valeurs du pouvoir séparateur P ont été calculées par la formule (70) à partir des valeurs de C_c et de C_s; lorsque la source a le rayon optimum, on a pour P' :

$$P' = G^{\frac{4}{5}} \frac{C_c}{a} \left(\frac{C_s}{a}\right)^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{L}{a}\right)^{-\frac{4}{5}}, \qquad (150)$$

le nouveau spectrographe est dans la majorité des cas supérieur à l'appareil à champ uniforme.

Les données dans la Note [23] des auteurs suédois, sont trop succinctes pour permettre une vérification expérimentale serrée des formules. Cependant, on peut calculer que la transmission de 8 pour 100 indiquée comme exemple implique une valeur $\varepsilon = 0{,}13$ et mène, quel que soit K^2 à peu près à la même valeur de P' car ni le rayon de la source ni l'épaisseur de la fente e sélectrice ne sont données. Le dessin montre seulement que $\frac{e}{R} = 0{,}1$ environ alors que le calcul mène à $\frac{\delta R_s}{R} = 0{,}04$ ce qui donnerait déjà un pouvoir séparateur de 32 seulement, si la source était de petit rayon $\left(\frac{\delta R_s}{2}\right)$. Il est très probable que l'intervention du rayon de la source mène à une valeur de P' en accord avec la valeur mesurée $P' = 25$. Il est à remarquer que le rapport $\frac{R}{L}$ égal à 0,15 sur les photographies a une valeur très voisine de celle indiquée par la théorie : $\frac{R}{L} = 0{,}14$ pour $K^2 = 3$.

4. **Variante de Bothe.** — Bothe [27] a proposé d'employer des lentilles minces au lieu de lentilles épaisses. Cette proposition est justiciable de notre théorie et revient à choisir une valeur faible pour K^2. On est alors conduit à faire passer les rayons à

travers les bobines, ce qui empêche d'utiliser des ouvertures élevées. Les valeurs de G inversement proportionnelles à α^2 sont alors grandes et le spectrographe est très encombrant.

Cette disposition ne semble donc pas avantageuse et il paraît préférable d'en rester aux valeurs expérimentalement confirmées de Siegbahn et Slätis.

E. — Spectrographe double.

Notre proposition tend à améliorer le pouvoir séparateur du spectrographe de Siegbahn et Slätis, en installant un deuxième diaphragme sélecteur circulaire, devant le récepteur et en ajustant le diamètre de son ouverture avec autant de soin que l'épaisseur de la fente annulaire médiane.

Le gain escompté est d'abord une réduction plus massive des effets parasites. Il réside aussi dans l'augmentation du pouvoir séparateur qu'on observe dans tous les monochromateurs doubles et qui est représenté environ par un facteur 2, si l'on définit P^* comme au début de cet article, par la valeur de $\frac{\lambda}{\delta\lambda}$ correspondant à un écart $\delta\lambda$ tel que pour deux raies monochromatiques écartées de $\delta\lambda$ l'intensité tombe entre les deux raies à la fraction 0,7 de celle qu'on observe lorsque l'appareil est réglé exactement sur l'une d'entre elles

$$P^* = 2P. \tag{151}$$

Ce gain est surtout intéressant lorsqu'il est obtenu sans changement de l'intensité reçue.

Nous examinerons quelles conditions sont à réaliser pour cela, c'est-à-dire pour que la deuxième moitié de l'appareil transmette tous les rayons qui ont traversé la première.

α et ε sont alors les mêmes pour les deux moitiés.

1° Supposons d'abord que l'on cherche un pouvoir séparateur élevé et qu'on travaille avec une petite source de rayon négligeable. Alors on devra choisir pour le rayon du trou ρ_s la valeur donnée par la formule (43). Cette condition est commodément réalisable pour une transmission de 10 pour 100 puisque avec $\alpha = 45°$ on a dans des conditions moyennes ($G = 5$), $\rho_s = 0{,}38\ \delta R_s$; et comme alors $\delta R_s = 7$ mm pour $L = 1$ m, on a $\rho_s = 2{,}8$ mm.

Au contraire, si l'on veut abaisser la transmission à 1 pour 100, le trou devient 1000 fois plus petit soit $2{,}8\ \mu$, ce qui paraît difficilement réalisable. On ne pourra donc pas tirer le meilleur parti de la deuxième moitié dans ce cas.

2° Si la source est étendue, les conditions les meilleures sont obtenues dans la première moitié pour $s = 0{,}4\ \delta R_s$ et pour $s = 6\rho_s$ dans la deuxième ; ces deux conditions ne sont pas compatibles pour une transmission de 10 pour 100 car la deuxième est alors équivalente à $s = 2{,}4\ \delta R_s$. Elles deviennent simultanément réalisables pour un angle ε six fois plus petit c'est-à-dire une transmission de 1,7 pour 100.

La difficulté de fabriquer le diaphragme circulaire et de le placer avec précision est encore grande, puisqu'il ne doit avoir qu'un rayon de 0,013 mm environ, mais le problème est certainement soluble en pratique et les prévisions de cette théorie pourront être vérifiées expérimentalement.

On peut donc conclure, de cette discussion, que l'usage du diaphragme supplémentaire près du récepteur peut mener à une nette amélioration du pouvoir séparateur sans diminution de luminosité dès que la transmission dépasse 2 pour 100 et qu'on utilise une source étendue. La complication de la construction et des réglages est assez minime pour que l'expérience vaille d'être tentée.

APPENDICE I.

Dans un Mémoire récent, W. Glaser a énoncé cette formule [35] sous une forme erronée, qu'il a pu employer sans inconvénient, le terme inexact n'intervenant pas dans l'application qu'il a traitée. Au contraire, dans la théorie des spectrographes à rayons β le terme incriminé joue un rôle important. Voici deux démonstrations de la formule :

1° **Méthode de l'iconale.** — L'iconale de Seidel (ou iconale mixte) s'écrit en utilisant les notations classiques de M. Born ([36], p. 93 et 203) à l'exception de F que nous remplaçons ici par $\bar{F}$

$$S_4 = -\frac{B}{4}(\eta_1^2 + \rho_1^2)^2 + \bar{F}(\eta_1^2 + \rho_1^2)(y_0\eta_1 + z_0\rho_1) + \ldots, \tag{152}$$

d'où l'on tire

$$\delta y_1 = B\eta_1^3, \qquad \delta\eta_1 = \bar{F}\eta_1^3. \tag{153}$$

Ces quantités représentent en coordonnées réduites ($y_1\ \eta_1$) les écarts entre les points où le rayon réel et son approximation de Gauss percent respectivement le plan image (δy_1) et le plan de la pupille de sortie ($\delta\eta_1$). On en déduit facilement la correction dθ, à apporter à la valeur gaussienne θ_g de l'inclinaison sur l'axe du rayon émergeant dans le plan image

$$d\theta = \frac{b_1}{M_0}\delta\eta_1 - \frac{\delta y_1}{n_1 b_1} = \left(\frac{b_1}{M_1}\bar{F} - \frac{B}{n_1 b_1}\right)\eta^3. \tag{154}$$

En revenant à des notations plus courantes

$$d\theta = \frac{n_0}{n_i}\left(\frac{F}{G} - \frac{C_s}{g M_0}\right)\alpha^3, \tag{155}$$

n_0, n_i indices dans le plan objet et le plan image, G grandissement algébrique pour les plans conjugués :

objet image, g grandissement algébrique pour les plans conjugués : pupille d'entrée, pupille de sortie; M_0 abscisse de la pupille d'entrée comptée à partir de l'objet, F coefficient du coma défini par

$$\Delta r = -3 G F \alpha^2 r_0;$$

C_s coefficient de l'aberration sphérique défini par $\Delta r = G C_s \alpha^3$.

Dans le domaine de Gauss (lorsque $\delta y_1 = 0$, $\delta \eta_1 = 0$) θ devient θ_g et il est lié à l'angle α qui lui correspond au niveau de l'objet par la formule d'Abbe

$$n_0 \sin\alpha = G n_i \sin\theta_g. \tag{156}$$

On obtient donc en général, dans le domaine du troisième ordre

$$n_i \sin\theta = \frac{n_0 \sin\alpha}{G} + n_0\left(\frac{F}{G} - \frac{C_s}{g M_0}\right)\alpha^3. \tag{157}$$

Lorsque l'objet est au foyer, le produit $g M_0$ tend vers la distance focale objet f_0 la formule se réduit à

$$\sin\theta = \frac{-n_0}{n_i}\frac{C_s}{f_0}\alpha^3 = \frac{C_s \alpha^3}{f_i}. \tag{158}$$

2° **Méthode des trajectoires.** — Si l'écart entre le rayon réel r et son approximation de Gauss (r_g) est noté Δr, on a

$$n_0 \Delta r = \sigma(z)\int_{z_0}^{z} \sqrt{\varphi}\, S(z)\tau(z)\, \mathrm{d}r - \tau(z)\int_{z_0}^{z} \sqrt{\varphi}\, S(z)\sigma(z)\, \mathrm{d}z; \tag{159}$$

$\sigma(z)$ désignant la trajectoire de Gauss obéissant à

$$\sigma(z_0) = \sigma(z_i) = 0, \qquad \sigma'(z_0) = 1, \tag{160}$$

et $\tau(z)$ celle pour laquelle $\tau(z_0) = 1$, $\tau(z_i) = G$, $\tau(z_p) = 0$, z_p étant l'abscisse de la pupille d'entrée.

$\varphi(z)$ est le potentiel sur l'axe, $S(z)$ désigne l'ensemble classique des termes correctifs du troisième ordre; pour simplifier les notations nous nous plaçons dans le cas de la focalisation électrostatique, d'où il est facile de passer au cas magnétique, la formule finale restant inchangée. On a alors (*cf.* [6], p. 81) :

$$\mathrm{tg}\,\theta = r'_g + (\Delta r)' = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{G} + (\Delta r)' \tag{161}$$

et

$$\sqrt{\varphi_0}(\Delta r)' = \sigma'_i \int_{z_0}^{z_i} \sqrt{\varphi}\, S\tau\, \mathrm{d}r - \tau'_i \int_{z_0}^{z_i} \sqrt{\varphi}\, S\sigma\, \mathrm{d}r. \tag{162}$$

L'évaluation du deuxième terme de (3) est classique et donne :

$$-\tau'(z_i)\int_{z_0}^{z_i} \sqrt{\varphi}\, S\sigma\, \mathrm{d}r = \tau'_i C_s \alpha^3. \tag{163}$$

Le premier terme de (3) se calcule de la même manière que le deuxième, mais le remplacement initial de σ par τ mène à

$$\sigma' \int_{z_0}^{z_i} \sqrt{\varphi}\, S\tau\, \mathrm{d}r = \frac{1}{G\sqrt{\varphi_i}}\alpha^3 \times \left[\frac{\sqrt{\varphi_0}}{2}\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_1 G^2} - 1\right) + \bar{F}\sqrt{\varphi_0}\right] \tag{164}$$

et l'on a au total, en introduisant les indices $n = \sqrt{\varphi}$ pour simplifier l'écriture

$$(\Delta r)'_i = \alpha^3\left[C_s \tau'_i + \frac{1}{G n_i}\frac{n_0}{2}\left(\frac{n_0^2}{n_i^2 G^2} - 1\right) + \bar{F} n_0\right] \tag{165}$$

qui est identique à la formule (1) si l'on remarque que

$$\tau'_i = \frac{n_0}{n_i g M_0}, \tag{166}$$

$$n_i(\mathrm{tg}\,\theta - \sin\theta) = n_0 \frac{(\mathrm{tg}\,\alpha - \sin\alpha)}{G} + \frac{n_0 \alpha^3}{2G}\left(\frac{n_0^2}{n_i^2 G^2} - 1\right). \tag{167}$$

3° Nous utilisons les formules précédentes sous la forme

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\alpha}{G} - \mu\alpha^3. \tag{168}$$

On a donc en général

$$\mu = \frac{1}{6G} - \frac{F}{G} - \frac{1}{2G^3} + \frac{C_s}{g M_0}. \tag{169}$$

En général F n'est pas nul et g et M_0 sont donnés par la position du diaphragme d'ouverture. Mais on peut choisir cette dernière pour que $F = 0$; cela est toujours possible en théorie et le plus souvent réalisable en pratique; Glaser a montré [35] que son modèle permettait de déterminer commodément cette position particulière; ses formules permettaient aussi de calculer g et M_0, mais nous n'en avons pas besoin ici.

En effet, nous ne nous servons que de la valeur limite de $g M_0$ lorsque l'objet est proche d'un foyer; des considérations d'Optique géométrique élémentaires montrent alors que $g M_0 = f_0$.

On a dans ce cas

$$\mu = \frac{1}{6G} - \frac{1}{2G^3} + \frac{C_s}{f_0}. \tag{170}$$

APPENDICE II.

Écrivons l'équation différentielle du rayon de Gauss sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} + r T_1(z) = 0. \tag{171}$$

Lorsque le champ sur l'axe a la valeur exacte correspondant à un courant circulaire filiforme, et appelons $T_2(z)$ la forme que prend le coefficient de r

lorsqu'on utilise une représentation approchée du champ sur l'axe.

La méthode de variation des constantes donne alors l'erreur δr qui résulte de cette approximation dans le plan de l'image A′ d'abscisse z_i d'un objet A d'abscisse z_0. On a dans le cas où l'objet est à l'infini et l'image au foyer

$$\delta r(z_{f_i}) = + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \int_{-\infty}^{z_{f_i}} (T_2 - T_1) r^2 \, dz. \tag{172}$$

Il en résulte que l'approximation sera bonne si

$$\int_{-\infty}^{z_{f_i}} (T_2 - T_1) r^2 \, dz = 0. \tag{173}$$

a. Dans le cas où la lentille est mince, on peut étendre la limite supérieure de l'intégrale jusqu'à l'infini et r peut être considéré comme constant pendant la traversée de la lentille. On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (T_2 - T_1) \, dz = 0. \tag{174}$$

D'autre part, on a, à un facteur près

$$T_1 = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{\rho_2}\right)^2\right]^3}, \qquad T_2 = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^2}. \tag{175}$$

Si l'on pose $\rho_2 = ma$, $z = ax$, on a la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x}{m}\right)^2\right]^3} - \frac{1}{(1 + x^2)^2} \right) dx = 0. \tag{176}$$

on en déduit

$$m = \frac{4}{3} = 1,33. \tag{177}$$

b. Dans le cas où la lentille est épaisse, le calcul paraît compliqué en général. Nous nous contenterons de traiter le cas où $\omega = 2$ dans l'approximation de Glaser; l'expression de r est alors très simple

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \frac{x^2}{1 + x^2}, \tag{178}$$

ce qui mène à la condition

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{m^2}\right)^3} - \frac{1}{(1 + x^2)^2} \right\} \frac{x^2}{1 + x^2} \, dx = 0. \tag{179}$$

On peut évaluer l'intégrale par la méthode des résidus et l'on trouve pour m, l'équation

$$\frac{3}{m} - 1 - \frac{3m^2 + 9m + 8}{(m + 1)^3} = 0, \tag{180}$$

dont la racine intéressante est

$$m = 1,379. \tag{181}$$

APPENDICE III.

Nous avons remarqué que les formules que donne Glaser lorsque l'objet est réel et son image virtuelle (ou vice versa) sont inexactes. En effet, Glaser associe alors au point objet, un point qui n'est pas son image virtuelle obtenue en prolongeant l'asymptote du rayon émergent jusqu'à sa rencontre avec l'axe des z; il considère au contraire, comme image le point de rencontre avec l'axe d'une branche impropre de la représentation mathématique du rayon qui ne semble pas avoir d'interprétation physique simple.

Or, dans le spectrographe β, l'objet est souvent dans une région où son image est virtuelle, mais heureusement il est très près du foyer et l'on peut alors montrer que les formules de Glaser sont encore valables au premier ordre tant que $\frac{1}{G}$ peut être considéré comme petit. En effet, l'image virtuelle correcte correspond à l'objet suivant les formules

$$x_0 = \operatorname{cotg}\varphi_0, \qquad x_i = \omega \operatorname{cotg} \omega \varphi_0, \tag{182}$$

x désignant l'abscisse réduite $\frac{z}{a}$ tandis que Glaser donne

$$x_0 = \operatorname{cotg}\varphi_0, \qquad x_i = \operatorname{cotg}\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{\omega}\right), \tag{183}$$

ces deux formules donnent les mêmes résultats au premier ordre en ε, lorsque l'objet est près du foyer, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{\omega} - \varepsilon. \tag{184}$$

APPENDICE IV.

Le Professeur Glaser, auquel nous avions soumis le manuscrit de cet article, nous a informé qu'il avait indépendamment réfléchi au problème traité dans l'appendice II. On trouvera dans l'article suivant : W. Glaser, Berechnung der optischen Konstanten starker magnetischer Elektronenlinsen, *Annalen der Physik*, 1950, **7** (6), 213-227, l'élégante solution qu'il a donné de ce problème : elle adapte la cloche classique aux conditions expérimentales en minimisant l'erreur sur les paramètres gaussiens, par un calcul de portée très générale.

Le Professeur Glaser s'est aussi penché récemment sur le problème posé dans l'appendice III et a précisé la nature des paramètres (grossissement et distance focale) qu'il était, seuls, permis de calculer en se servant des prolongements purement analytiques des trajectoires. On trouvera cette mise au point dans le compte rendu des communications au Congrès de Microscopie électronique de Paris (septembre 1950).

Manuscrit reçu le 5 mai 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] GLASER W. — Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform $H = \frac{H_0}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}$. *Z. Physik*, 1941, **117**, 285-315.

[2] GLASER W. et LAMMEL E. — Strenge Berechnung der Elektronenoptischen Aberrationskurven eines typischen Magnetfeldes. *Arch. f. Elektrotechnik*, 1943, **37**, 347-356.

[3] KAPITZA P. — Inventeur du montage suivant référence [4], p. 454.

[4] TRICKER R. A. R. — A helical method of focussing β rays. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1924, **22**, 454-463.

[5] GRIVET P. et PAQUIEN G. — Théorie du spectrographe β type K. Siegbahn. *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 196-198.

[6] GRIVET P. — Advances in electronics (Electron lenses), p. 48-102, Academic Press, New-York, 1950.

[7] PERSICO E. — A theory of the Solenoïd β ray spectrometer. *Rev. Sc. Instr.*, 1949 (n° 3), **20**, 191-196.

[8] DU MOND J. W. M. — Conditions for optimum luminosity and energy resolution in an axial β ray spectrometer with homogeneous Magnetic Field. *Rev. Sc. Instr.*, 1949 (n° 3), **20**, 160-169.

[9] WITCHER C. M. — An electron lens type of β ray spectrometer. *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 32-42.

[10] FRANKEL S. — A β ray spectrometer design of quadratic resolution solid angle characteristic. *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 804.

[11] KLEMPERER O. — The use of electron lenses for β rays. *Phil. Mag.*, 1935 (n° 134), S 7, **20**, 545-561.

[12] COSSLETT V. E. — The resolving power of the magnetic electron lens used as a β ray spectrometer. *Proc. Phys. Soc.*, 1940 (n° 4), **52**, 511-517.

[13] COSSLETT V. E. — A magnetic lens for β rays of high energy. *J. Sc. Instr.*, 1940 (n° 11), **17**, 259-264.

[14] SIEGBAHN K. — Untersuchungen über die Verwendung der magnetischen Linse für β spectroskope. *Arkiv. Mat. Astr. Fysik*, 1942 (n° 17), **28**, 1-27.

[15] DEUTSCH M., ELLIOT L. G., EVANS R. D. — Theory, design and applications of a short magnetic lens electron spectrometer. *Rev. Sc. Instr.*, 1944 (n° 7), **15**, 178-195.

[16] LAURITSEN T., CHRISTY R. F. — Investigation of a Lens type β ray spectrograph. *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 536.

[17] GRIVET P. — Théorie du spectrographe β à bobine courte. *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 936-937.

[18] SCHERZER O. — Uber einige Fehler von Elektronenlinsen. *Z. Physik*, 1936, **101**, 593-604.

[19] SIEGBAHN K. — Formation of Image in a Strong Magnetic Lens. *Arkiv. Math. Astr. Fysik*, 1944 (n° 1), **30 A**, 1-12.

[20] SIEBAHN K. — A magnetic lens of special Field form for β and γ Ray investigations. Design and application. *Phil. Mag.*, 1946, (7), **37**, 162-184.

[21] GLASER W. — Uber ein von sphärischer aberration freies Magnet feld. *Z. Physik*, 1940, **116**, 19-33.

[22] GRIVET P. et PAQUIEN G. — Théorie du spectrographe β, type K. Siegbahn. *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 64-65.

[23] SIEGBAHN K. et SLÄTIS H. — A new type of focussing in a magnetic lens field. *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1955.

[24] SLÄTIS H. — Sur une méthode photographique pour l'étude des propriétés optiques des lentilles magnétiques et pour l'enregistrement des lignes du rayonnement β. *Arkiv. Math. Astr. Fysik*, 1945 (n° 20), **32 A**, 1-27.

[25] GRIVET P. — Théorie d'un nouveau spectrographe β à isolement focal. *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1048-1050.

[26] GRIVET P. — Sur une amélioration des spectrographes β à lentilles. *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1652-1653.

[27] BOTHE W. — Prinzip eines Doppellinsenspektrometres für β und γ strahlen. *Naturwissenschaften*, 1950 (n° 2), **37**, 41.

[28] GRIVET P. — Sur l'extension de la formule de Lagrange-Helmoltz au domaine du troisième ordre. *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1152-1154.

[29] COTTE M. — Recherches sur l'Optique électronique. *Ann. Physique*, 1938, **10**, 333-406.

[30] LYLE T. R. — On circular filaments equivalents to circular Coils, and on the equivalent radius of a coil. *Phil. Mag.*, 1902 (6), **3**, 310-329.

[31] KELLER J. M., KŒNIGSBERG E. et PASKIN A. — Ring focus in a thin magnetic lens β ray spectrometer. *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 454-455.

[32] PRATT W. W., BOLEY F. I. et NICHOLS R. T. — Ring focus in a thin lens magnetic spectrometer. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1950 (n° 3), **25**, 17.

[33] JENSEN E. N., JACKSON L., LASLETT et PRATT W. W. — The application of a magnetic lens spectrometer to the measurements of γ radiation from Zn^{65} and Co^{60}.

[34] AGEW H. M. et ANDERSON H. L. — Double magnetic lens nuclear spectrometer. *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 869-873.

[35] GLASER W. — Bildenstehung und Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskopes vom Standpunkt der Wellenmechanik. *Z. Physik*, 1943, **121**, 647-665.

[36] BORN M. — Optik, Springer, Berlin, 1933.

ÉTUDE DE LA RÉPARTITION DE LA CHALEUR DANS L'ANTICATHODE D'UN TUBE À RAYONS X

Par M. MATRICON.
Docteur ès sciences,
Directeur du Centre de Recherches Physiques de la Compagnie française Thomson-Houston,
Ingénieur Conseil à la Compagnie Générale de Radiologie.

Sommaire. — Plusieurs auteurs ont étudié la répartition de la chaleur dans l'anticathode d'un tube à rayons X (A. Bouwers, *Z. Techn. Physik*, 1927, **8**, 271; W. J. Oosterkamp, *Thèse* de doctorat, Delft; F. R. Arbott, *J. Appl. Phys.*, juin 1942).

Toutefois, aucune des solutions analytiques proposées ne permet d'étudier facilement, et d'une façon suffisamment précise, la répartition de la chaleur dans une anticathode constituée de deux métaux (cible de tungstène enchâssée dans une masse de cuivre). Nous nous sommes proposé de traiter cet aspect du problème et de déterminer l'épaisseur optima qu'il convient de donner à la cible de tungstène selon le régime de fonctionnement choisi. Dans les trois premières parties, nous avons rétabli des résultats connus en utilisant, d'une façon systématique, la méthode de la transformation de Laplace; dans les autres parties, nous avons développé ces résultats et nous les avons appliqués aux cas réels des anticathodes de tubes à rayons X.

1. Foyer de dimensions illimitées sur une anticathode homogène. — Soit A la face frontale de dimensions illimitées d'une anticathode homogène (*fig.* 1). Soit Ox un axe perpendiculaire à A.

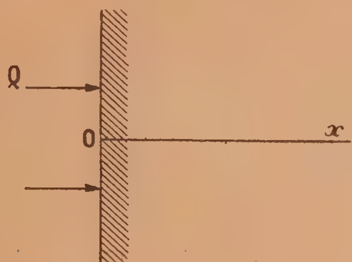


Fig. 1.

A partir de l'époque $t = 0$, la face A reçoit, sur toute sa surface, Q calories par seconde et par centimètre carré.

La température T en un point de l'anticathode ne dépend évidemment que de la distance x de ce point à la face A et de l'époque t considérée.

Nous nous proposons donc de déterminer cette fonction $T(x, t)$ en supposant qu'à l'époque initiale la température de l'anticathode est uniforme et égale à T_0 et que, de plus, cette température T_0 se maintient à toute époque à l'infini.

Si l'on désigne par k, c et μ respectivement la conductibilité thermique, la chaleur spécifique et la masse spécifique du métal constituant l'anticathode, et si l'on pose $\alpha^2 = \frac{k}{\mu c}$, on sait que la température $T(x, t)$ doit satisfaire à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial T}{\partial t},$$

avec la condition initiale

$$T(x, 0) = T_0$$

et les conditions aux limites

$$T(\infty, t) = T_0,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{Q}{k} = -\beta.$$

Prenons comme fonction inconnue

$$U(x, t) = T(x, t) - T_0.$$

Les données du problème à résoudre prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial U}{\partial t},$$

$$U(x, 0) = 0,$$

$$U(\infty, t) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} = -\beta.$$

Appliquons à ce système la transformation de Laplace :

$$u(x, p) = \int_0^\infty U(x, t)\, e^{-pt}\, dt,$$

qui fait ainsi correspondre à une fonction $U(x, t)$, dite fonction originale, une fonction $u(x, p)$ dite fonction image, ce qui se représente par la notation

$$u(x, p) \subset U(x, t).$$

On sait que

$$\frac{\partial U}{\partial t} \supset \int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial t}\, e^{-pt}\, dt = [U\, e^{-pt}]_0^\infty + p \int_0^\infty U\, e^{-pt}\, dt = pu,$$

puisque

$$U(x, 0) = 0.$$

De même,

$$\beta \supset \int_0^\infty \beta\, e^{-pt}\, dt = \frac{\beta}{p}$$

et

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \supset \int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\, e^{-pt}\, dt = \frac{d^2 u}{dx^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \supset \frac{du}{dx}.$$

Le système à intégrer devient

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{p}{\alpha^2} u,$$
$$u(\infty, p) = 0,$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{\beta}{p}.$$

Ce n'est plus qu'une simple équation différentielle qui a pour solution

$$u(x, p) = \frac{\alpha\beta}{p\sqrt{p}}\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha}x}.$$

Pour passer de $u(x, p)$ à la fonction originale $U(x, t)$ il faut appliquer à $u(x, p)$ la transformation inverse de la transformation de Laplace. En fait il existe des tables des fonctions transformées, et si nous nous référons par exemple à H. S. Carslaw et J. C. Jaeger (*Conduction of Heat in Solids. Table of Laplace Transforms*, p. 380 et 381), nous trouvons

$$\frac{\alpha\beta}{p\sqrt{p}}\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha}x} \subset \alpha\beta \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} - \alpha\beta \frac{2x}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Suivant une notation connue, nous poserons

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-\xi^2}\, d\xi = \operatorname{erf} v,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_v^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = 1 - \operatorname{erf} v = \operatorname{erfc} v$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-v^2} - \frac{2v}{\sqrt{\pi}} \int_v^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \int_v^{+\infty} \operatorname{erfc} \xi\, d\xi = \operatorname{ierfc} v,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{\alpha\beta}{p\sqrt{p}}\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha}x} \subset 2\alpha\beta\sqrt{t}\, \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}$$

et

$$U(x, t) = \frac{2\alpha Q}{k}\sqrt{t}\, \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}. \tag{1}$$

2. **Foyer de dimensions illimitées sur une anticathode bimétallique.** — Soit A la surface frontale plane illimitée d'une anticathode (*fig.* 2)

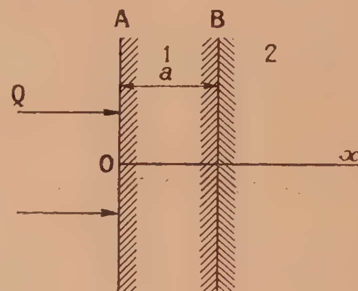


Fig. 2.

et B le plan parallèle au plan A constitué par la surface de séparation entre le métal superficiel 1 d'épaisseur a et le métal support 2.

Soit Ox un axe perpendiculaire aux plans A et B.

La température en un point quelconque de l'anticathode ne dépend que de x et de t. En employant des notations analogues à celles du paragraphe précédent nous appellerons α_1 et k_1 les constantes thermiques du milieu 1, α_2 et k_2 les constantes thermiques du milieu 2, $U_1(x, t)$ la fonction température dans le milieu 1, et $U_2(x, t)$ la fonction température dans le milieu 2. Nous supposerons que la face frontale A reçoit Q calories par seconde et par centimètre carré. Dans ces conditions, les équations du problème sont :

1° *Milieu* 1 :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial t},$$
$$U_1(x, 0) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{Q}{k_1} = -\beta.$$

2° *Milieu* 2 :

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial U_2}{\partial t},$$
$$U_2(x, 0) = 0,$$
$$U_2(\infty, t) = 0,$$

3° Conditions exprimant l'égalité des flux de chaleur et des températures à la surface de séparation des deux milieux.

$$k_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=a} = k_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x=a},$$
$$U_1(a, t) = U_2(a, t).$$

Appliquons la transformation de Laplace à ce

système; il devient

$$\frac{d^2u_1}{dx^2}=\frac{p}{\alpha_1^2},\qquad \left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=0}=-\frac{\beta}{p};$$
$$\frac{d^2u_2}{dx^2}=\frac{p}{\alpha_2^2},\qquad u_2(\infty, t)=0;$$
$$u_1(a)=u_2(a),\qquad k_1\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a}=k_2\left(\frac{du_2}{dx}\right)_{x=a}.$$

On trouve facilement que la solution de ce système est

$$u_1=\frac{\alpha_1\beta}{p\sqrt{p}}\,\frac{e^{-\frac{x}{\alpha_1}\sqrt{p}}-m\,e^{\left(\frac{x-2a}{\alpha_1}\right)\sqrt{p}}}{1+m\,e^{-\frac{2a}{\alpha_1}\sqrt{p}}},$$

$$u_2=\frac{\alpha_1\beta}{p\sqrt{p}}(1-m)\,\frac{e^{-\left(\frac{a}{\alpha_1}+\frac{x-a}{\alpha_2}\right)\sqrt{p}}}{1+m\,e^{-2\frac{a}{\alpha_1}\sqrt{p}}},$$

avec

$$m=\frac{\frac{k_2}{\alpha_2}-\frac{k_1}{\alpha_1}}{\frac{k_2}{\alpha_2}+\frac{k_1}{\alpha_1}}.$$

Pour trouver les fonctions originales de u_1 et de u_2, nous appliquerons d'abord à u_1 et u_2 le développement

$$\frac{1}{1+m\,e^{-\frac{2a}{\alpha_1}\sqrt{p}}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-m)^n\,e^{-\frac{2na}{\alpha_1}\sqrt{p}},$$

ce qui met ces fonctions sous la forme

$$u_1=\frac{\alpha_1\beta}{p\sqrt{p}}\,e^{-\frac{x}{\alpha_1}\sqrt{p}}+\frac{\alpha_1\beta}{p\sqrt{p}}\sum_{n=1}^{\infty}(-m)^n\left[e^{-\frac{2na+x}{\alpha_1}\sqrt{p}}+e^{-\frac{2na-x}{\alpha_1}\sqrt{p}}\right],$$

$$u_2=\frac{\alpha_1\beta}{p\sqrt{p}}(1-m)\sum_{n=0}^{\infty}(-m)^n\,e^{-\left[\frac{(2n+1)a}{\alpha_1}+\frac{x-a}{\alpha_2}\right]\sqrt{p}}.$$

Tous les termes de ces deux sommes sont du même type : $\frac{K}{p\sqrt{p}}e^{-B\sqrt{p}}$, et l'on sait que la fonction originale est

$$K.2\sqrt{t}\,\text{ierfc}\,\frac{B}{2\sqrt{t}}.$$

On en déduit donc

$$U_1=\frac{2\alpha_1 Q}{k_1}\sqrt{t}\,\text{ierfc}\,\frac{x}{2\alpha_1\sqrt{t}}+\frac{2\alpha_1 Q}{k_1}\sqrt{t}\sum_{n=1}^{\infty}(-m)^n\times\left[\text{ierfc}\,\frac{2na+x}{2\alpha_1\sqrt{t}}+\text{ierfc}\,\frac{2na-x}{2\alpha_1\sqrt{t}}\right], \qquad (2)$$

$$U_2=\frac{2\alpha_1 Q}{k_1}(1-m)\sqrt{t}\times\sum_{n=0}^{\infty}(-m)^n\,\text{ierfc}\,\frac{(2n+1)a+(x-a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}{2\alpha_1\sqrt{t}}. \qquad (3)$$

On peut donner de ces formules une interprétation physique curieuse qui nous servira plus tard dans le cas des foyers de dimensions limitées, lorsque les ressources de l'analyse nous feront défaut.

Examinons d'abord la formule (2) et rappelons que la distribution de la température dans une anticathode homogène est donnée par (1) :

$$U=\frac{2\alpha Q}{k}\sqrt{t}\,\text{ierfc}\,\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}.$$

On peut donc considérer la distribution de température donnée par la formule (2) comme résultant de l'action dans un milieu homogène de constantes k_1, α_1 d'une source principale de densité d'énergie Q située sur la face A, et de sources auxiliaires de densité d'énergie $(-m)^n\,Q$ situées à des distances $(2na+x)$ et $(2na-x)$ du point considéré On voit facilement (*fig.* 3) que l'emplacement

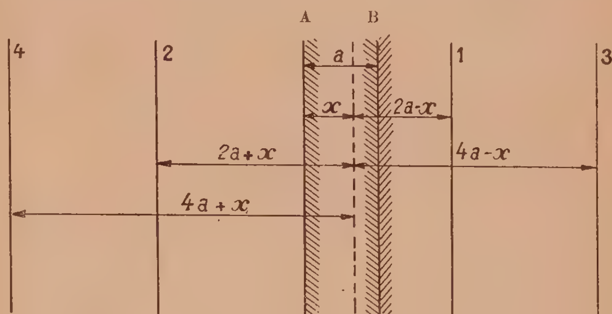


Fig. 3.

de ces sources s'obtient en prenant le plan 1 symétrique du plan A par rapport au plan B, puis le plan 2 symétrique du plan 1 par rapport au plan A, etc. De plus, cette interprétation suppose que chaque source d'énergie est placée sur une face frontale d'anticathode, c'est-à-dire que la chaleur fournie par une source ne peut diffuser que dans la direction allant de cette source vers le point d'abscisse x. On peut toutefois conserver l'image plus satisfaisante d'un milieu vraiment homogène à condition de doubler l'énergie de toutes les sources pour tenir compte de la diffusion dans les deux directions.

Cette interprétation ne change d'ailleurs pas la formule (2) puisque, seule, la chaleur diffusant vers le plan d'abscisse x doit être considérée.

De même la formule (3) peut être interprétée de la façon suivante :

La température dans le plan d'abscisse x situé dans le milieu 2 ($x > a$) est la même que celle qui serait atteinte en un plan d'abscisse $a+(x-a)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$ situé dans un milieu homogène de constantes k_1, α_1 sous l'influence des sources de chaleur de densité $Q(1-m)(-m)^n$ et situées sur des plans régu-

lièrement espacés comme il est indiqué sur la figure 4.

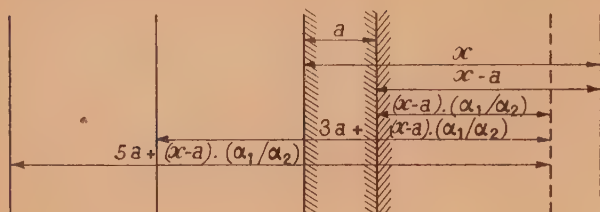


Fig. 4.

3. **Foyer ponctuel sur une anticathode homogène.** — Considérons un foyer constitué par une empreinte hémisphérique à la surface d'une anticathode indéfinie. Soit δr le rayon de cette empreinte et Q' la densité d'énergie appliquée à la surface du foyer.

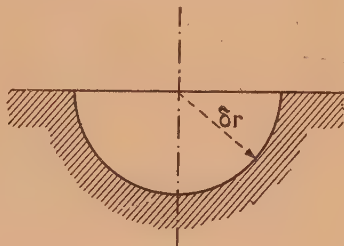


Fig. 5.

Appelons r la distance d'un point quelconque de l'anticathode au centre de l'empreinte. Par raison de symétrie la température ne dépend que de r et le problème est défini par les équations et conditions :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \\ &U(r, 0) = 0, \\ &U(\infty, t) = 0, \\ &\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=\delta r} = -\frac{Q'}{k}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Introduisons l'énergie totale dépensée au foyer

$$Q_1 = Q' . 2\pi\,\delta r^2$$

et faisons le changement de fonction inconnue

$$U = \frac{V}{r}.$$

Le système devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial V}{\partial t},$$

$$\left(\frac{V}{r}\right)_{t=0} = 0, \qquad \text{soit} \quad V_{t=0} = 0;$$

$$\left(\frac{V}{r}\right)_{r=\infty} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{r}\right)\right]_{r=\delta r} = -\frac{Q_1}{k . 2\pi\,\delta r^2}.$$

Appliquons la transformation de Laplace. On obtient

$$\frac{d^2 v}{dr^2} = \frac{p}{\alpha^2} v,$$

$$\left(\frac{v}{r}\right)_{r=\infty} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{r}\right)\right]_{r=\delta r} = -\frac{Q_1}{k . 2\pi\,\delta r^2}\,\frac{1}{p}.$$

La solution de ce système est

$$v = \frac{Q_1}{k . 2\pi\,\delta r}\,\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha}(r-\delta r)}}{p\left(\frac{\sqrt{p}}{\alpha} + \frac{1}{\delta r}\right)}.$$

On trouve dans la table des fonctions transformées la fonction originale $V(r, t)$ d'où l'on déduit

$$U = \frac{V}{r} = \frac{Q_1}{2\pi k r}\,\text{erfc}\,\frac{r - \delta r}{2\alpha\sqrt{t}} - \frac{Q_1}{2\pi k r}\,e^{\frac{r-\delta r}{\delta r} + \frac{\alpha^2 t}{\delta r^2}}\,\text{erfc}\left\{\frac{r - \delta r}{2\alpha\sqrt{t}} + \frac{\alpha\sqrt{t}}{\delta r}\right\}.$$

On passe au cas d'un foyer ponctuel en faisant tendre δr vers zéro, ce qui donne

$$U = \frac{Q_1}{2\pi k r}\,\text{erfc}\,\frac{r}{2\alpha\sqrt{t}}. \qquad (5)$$

4. **Foyer ponctuel sur une anticathode bimétallique.** — Nous allons calculer la distribution de la température due à des sources ponctuelles fictives disposées suivant la même loi que celle que nous avons mise en évidence à la fin du paragraphe 2 pour des sources planes de dimensions infinies.

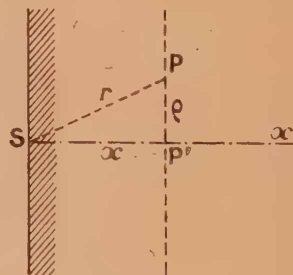


Fig. 6.

Tout d'abord, remarquons que si nous utilisons deux coordonnées d'espace, ρ et x suivant la figure 6, on a

$$SP = r, \qquad SP' = x \quad \text{et} \quad PP' = \rho$$

en désignant par S la source de chaleur ponctuelle et par P le point où l'on veut déterminer la température. Dans ces conditions, la formule (5) s'écrit

$$U = \frac{Q\,ds}{2\pi k\sqrt{\rho^2 + x^2}}\,\text{erfc}\,\frac{\sqrt{\rho^2 + x^2}}{2\alpha\sqrt{t}}$$

dans laquelle ds représente la surface infiniment petite du foyer ponctuel et Q la densité d'énergie appliquée à ce foyer.

La température due à un ensemble de sources ponctuelles disposées sur un même axe Sx perpendiculaire à la face frontale de l'anticathode et réparties selon la loi représentée sur la figure 3, a donc pour expression

$$U_1 = \frac{Q\,ds}{2\pi k_1 \sqrt{\rho^2+x^2}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2+x^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}} + \frac{Q\,ds}{2\pi k_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-m)^n \times \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(2na+x)^2}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2+(2na+x)^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(2na-x)^2}} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2+(2na-x)^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}} \right]. \quad (6)$$

De même la température due à un ensemble de sources ponctuelles réparties selon la loi représentée sur la figure 4 a pour expression

$$U_2 = \frac{Q\,ds}{2\pi k_1}(1-m) \times \sum_{n=0}^{\infty} (-m)^n \frac{1}{\sqrt{\rho^2+\left[(2n+1)a+(x-a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right]^2}} \times \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{\rho^2+\left[(2n+1)a+(x-a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right]^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}}. \quad (7)$$

Examinons avec quelle approximation les formules (6) et (7) peuvent être considérées comme apportant une solution au problème de la répartition de la température dans une anticathode bimétallique sous l'influence d'un foyer ponctuel.

Ce problème est défini par les équations et conditions suivantes :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial U_1}{\partial t} \qquad (0 \leq x \leq a); \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_2}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha_2^2}\frac{\partial U_2}{\partial t} \qquad (x \geq a); \quad (9)$$

$$U_1(x, \rho, t)_{t=0} = 0, \qquad U_2(x, \rho, t)_{t=0} = 0; \quad (10)$$

$$U_1(x, \rho, t)_{x=+\infty} = 0, \qquad U_1(x, \rho, t)_{\rho=+\infty} = 0, \qquad U_2(x, \rho, t)_{\rho=+\infty} = 0; \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\ \rho\neq 0}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\ \rho=0}} = -\infty \quad (12)$$

(la densité d'énergie étant infinie sur un foyer ponctuel)

$$U_1(a, \rho, t) = U_2(a, \rho, t); \quad (13)$$

$$k_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=a} = k^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x=a}. \quad (14)$$

On vérifie facilement que les conditions (10) et (11) sont satisfaites par chacun des termes qui figurent dans les sommes de formules (6) et (7). En utilisant des groupements convenables des termes figurant dans les sommes des formules (6) et (7) et en faisant intervenir la définition du paramètre

$$m = \frac{\frac{k_2}{\alpha_2} - \frac{k_1}{\alpha_1}}{\frac{k_2}{\alpha_2} + \frac{k_1}{\alpha_1}}$$

on vérifie également que les conditions (12), (13) et (14) sont satisfaites.

D'autre part, la formule (6) satisfait à l'équaton (8) puisque tous ses termes sont du type (5) qui est la solution de l'équation (4); or, l'équation (8) et l'équation (4) sont équivalentes puisqu'elles représentent l'équation

$$\Delta U = \frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial U_1}{\partial t}$$

respectivement en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.

Par contre, l'expression (7) ne satisfait pas à l'équation (9) car si l'on pose

$$X = (x-a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

on voit que tous ses termes sont solution de

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_2}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial U_2}{\partial t}.$$

Mais

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial X^2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}$$

et, par conséquent, l'expression (7) est solution de

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_2}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial U_2}{\partial t},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_2}{\partial \rho}\right] = \frac{1}{\alpha_2^2}\frac{\partial U_2}{\partial t}.$$

Remplaçons α_1 et α_2 par leurs valeurs

$$\frac{k_1}{\mu_1 c_1} \quad \text{et} \quad \frac{k_2}{\mu_2 c_2},$$

l'expression précédente devient

$$k_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\mu_2 c_2}{\mu_1 c_1}\left[\frac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_2}{\partial \rho}\right] = \rho_2 c_2 \frac{\partial U_2}{\partial t}$$

et sous cette forme on voit, par référence à la forme développée de l'équation de la chaleur, qu'elle caractérise la propagation de la chaleur dans un milieu dont la masse spécifique et la chaleur spécifique sont μ_2 et c_2, dont la conductibilité thermique est k_2 dans la direction Sx, ce qui correspond bien au problème réel, mais dont la conductibilité thermique radiale est égale à $\frac{\mu_2 c_2}{\mu_1 c_1}$.

Dans une application où le milieu 1 serait du tungstène et le milieu 2 du cuivre, cette conduc-

tibilité radiale serait voisine de la moitié de celle du cuivre.

On peut tout de même penser que dans la pratique les formules obtenues donneront des résultats utilisables car :

1° On s'intéresse surtout à la température obtenue dans la cible de tungstène; or, la relation fournissant la température dans le milieu 1 satisfait sans aucune approximation aux équation et conditions du problème dans ce milieu.

2° Si la relation fournissant la température dans le milieu 2 tient compte d'une conductibilité thermique radiale plus faible que la conductibilité réelle, par contre, le fait de supposer infinies les dimensions de l'anticathode dans le sens radial conduit à surestimer la diffusion de la chaleur dans le sens radial, et ces deux inexactitudes vont en sens contraire l'une de l'autre.

3° Au total, la chaleur se transmet axialement dans une anticathode et la formule donnant la température dans le milieu 2 tient compte d'une conductibilité thermique axiale qui est la conductibilité correcte du cuivre.

5. **Foyer de dimensions finies.** — Rappelons que l'équation de la chaleur étant linéaire la somme de plusieurs solutions de l'équation est également une solution et cette propriété s'étend à une somme d'un nombre illimité de termes et, par conséquent, à une intégrale.

Nous considérerons donc un foyer de dimensions finies comme constitué par un nombre infini de foyers ponctuels et la température en un point de l'anticathode résultera de la somme des contributions de chacun des foyers élémentaires.

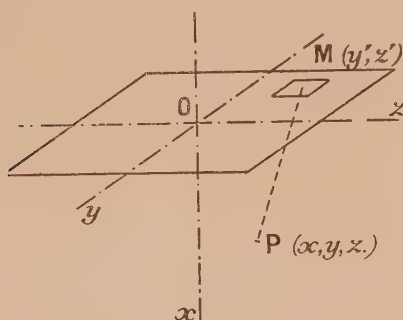


Fig. 7.

Si l'on considère un foyer rectangulaire (*fig.* 7) de largeur $2l$ et de longueur $2L$ rapporté à ses axes de symétrie $Oxyz$ établi sur la face frontale d'une anticathode homogène, la contribution à la température en un point P (x, y, z) due au foyer élémentaire $dy'\,dz'$ de coordonnées $x = 0$, $y = y'$, $z = z'$ sera

$$dU = \frac{Q\,dy'\,dz'}{2\pi k}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \times \operatorname{erfc}\frac{\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}{2\alpha\sqrt{t}}.$$

et la température totale en P sera

$$U(x, y, z, t) = \frac{Q}{2\pi k}\int_{-L}^{+L} dz' \times \int_{-l}^{+l} \frac{dy'}{\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \times \operatorname{erfc}\frac{\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}{2\alpha\sqrt{t}}.$$

Cette intégrale se prête mal au calcul numérique. Pour obtenir des expressions plus maniables nous procéderons de la façon suivante : rapportons le foyer à un système d'axes tels que l'axe perpendiculaire à la face frontale passe par le point P dont on veut calculer la température. Soit Ox cet axe et soit O le point où il perce la face frontale de l'anticathode. Rapportons les foyers élémentaires à un système de coordonnées polaires d'origine O.

Nous allons calculer la contribution à la température en P de toute la partie de la surface focale située entre des cercles de centre O et de rayons R_1 et R_2 (*fig.* 8) et comprise dans le même angle au

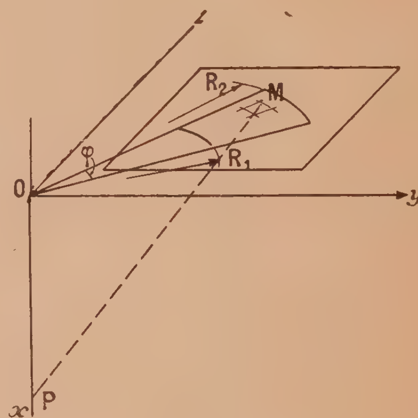


Fig. 8.

centre φ. On a

$$PM = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{\rho^2 + x^2}.$$

Le foyer élémentaire autour du point M a pour surface $\rho\,d\rho\,d\varphi$ et la température en P a pour valeur

$$U_{R_1 R_2} = \frac{Q}{2\pi k}\int_0^{\varphi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+x^2}}\operatorname{erfc}\frac{\sqrt{\rho^2+x^2}}{2\alpha\sqrt{t}},$$

Après quelques calculs élémentaires faisant intervenir une intégration par parties et la définition de

a fonction erfc v on trouve

$$U_{R_1R_2} = \frac{Q}{k}\,\frac{\varphi}{2\pi}\left\{\left[\sqrt{\rho^2+x^2}\,\operatorname{erfc}\frac{\sqrt{\rho^2+x^2}}{2\alpha\sqrt{t}}\right]_{R_1}^{R_2} + \frac{2\alpha\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left[-\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2+x^2}{4\alpha^2 t}}\right]_{R_1}^{R_2}\right\},$$

soit

$$U_{R_1R_2} = \frac{\varphi}{2\pi}\,\frac{2\alpha Q}{k}\sqrt{t}\left[-\operatorname{ierfc}\frac{\sqrt{\rho^2-x^2}}{2\alpha\sqrt{t}}\right]_{R_1}^{R_2}.$$

Pour déterminer la température due à la totalité du foyer il suffit de le décomposer en un nombre convenable de secteurs concentriques et d'appliquer à chacun d'eux la formule ci-dessus. On obtient ainsi

$$U = \sum_i \frac{\varphi_i}{2\pi}\,\frac{2\alpha Q}{k}\sqrt{t}\left[-\operatorname{ierfc}\frac{\sqrt{\rho^2+x^2}}{2\alpha\sqrt{t}}\right]_{R_i}^{R_{i+1}}.$$

En appliquant le même raisonnement à chacun des termes qui constituent les sommes (6) et (7) donnant la température dans le cas d'une anticathode bimétallique, on obtient immédiatement

$$U_1 = \sum_i \frac{\varphi_i}{2\pi}\,\frac{2\alpha_1 Q}{k_1}\sqrt{t} \times\left\{-\operatorname{ierfc}\frac{\sqrt{\rho^2+x^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}} - \sum_{n=1}^{\infty}(-m)^n \times\left[\operatorname{ierfc}\frac{\sqrt{\rho^2+(2na+x)^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}} + \operatorname{ierfc}\frac{\sqrt{\rho^2+(2na-x)^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}}\right]\right\}_{R_i}^{R_{i+1}}, \quad (15)$$

$$U_2 = \sum_i \frac{\varphi_i}{2\pi}\,\frac{2\alpha_1 Q}{k_1}\sqrt{t}(1-m)\sum_{n=0}^{\infty}(-m)^n \times\left\{-\operatorname{ierfc}\frac{\sqrt{\rho^2+\left[(2n+1)a+(x-a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right]^2}}{2\alpha_1\sqrt{t}}\right\}_{R_i}^{R_{i+1}}. \quad (16)$$

Avec ces formules, nous allons étudier la température maximum atteinte par le tungstène et le cuivre d'une anticathode fonctionnant en régime de radiographie pour différentes valeurs du temps de pose, pour différentes dimensions de foyer et pour différentes épaisseurs de la cible de tungstène de façon à déterminer quelle est, dans chaque cas, la meilleure épaisseur à donner à cette cible.

Mais avant d'aller plus loin remarquons que la température maximum n'est pas atteinte simultanément à la surface du foyer et à la surface de séparation du tungstène et du cuivre. A la surface du foyer, la température maximum est atteinte à la fin du temps de pose car elle commence à diminuer immédiatement après la cessation du bombardement électronique. Il n'en est pas de même à la surface de séparation entre le cuivre et le tungstène à cause de l'énergie emmagasinée dans la cible. Nous allons donc étudier à quelle époque postérieure à la cessation du bombardement électronique cette surface de séparation atteint sa température maximum.

6. **Évolution de la température après la cessation du bombardement électronique.** — L'équation de la chaleur étant linéaire, il en résulte que la température en un point d'un système est la somme des contributions dues à chacune des sources du système quel que soit leur emplacement, leur variation en fonction du temps et leur signe (source chaude ou source froide). Par conséquent, pour établir la loi de répartition de la température après cessation du bombardement électronique, il suffit de supposer qu'on maintient la source chaude, mais qu'on lui superpose une source froide de même valeur absolue et, évidemment, de signe opposé.

Si l'on désigne par $U(t)$ la loi d'évolution de la température, à la fin du bombardement électronique de durée Δt la température atteinte était $U(\Delta t)$ et à l'époque postérieure $\Delta t + \delta t$ la température devient la somme de la contribution due à la source chaude : $U(\Delta t + \delta t)$ et de celle due à la source froide : $-U(\delta t)$, soit au total

$$U(\Delta t + \delta t) - U(\delta t) = U_{\delta t}.$$

Après cessation du bombardement électronique la température à l'intérieur de l'anticathode continue à croître, passe par un maximum pour décroître ensuite.

L'époque de ce maximum est donnée par $\frac{\partial U_{\delta t}}{\partial(\delta t)} = 0$, soit

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=\Delta t+\delta t} - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=\delta t} = 0. \quad (17)$$

Nous allons calculer l'époque de ce maximum dans le cas d'une anticathode homogène lorsque, d'une part, la surface focale est infinie, et d'autre part, lorsqu'elle est ponctuelle.

a. Cas d'une surface focale infinie. — Dans ce cas, la température est donnée par la formule (1) :

$$U(x, t) = \frac{2\alpha Q}{k}\sqrt{t}\,\operatorname{ierfc}\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{Q}{k}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\alpha}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$

et la relation (17) donne

$$\frac{a}{2\alpha\sqrt{\Delta t+\delta t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4\alpha^2(\Delta t+\delta t)}} - \frac{a}{2\alpha\sqrt{\delta t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4\alpha^2\delta t}} = 0, \quad (18)$$

en remplaçant x par a pour déterminer l'époque du maximum de température à la profondeur a.

Posons

$$\frac{a}{2\alpha\sqrt{\Delta t+\delta t}} = X, \qquad \frac{a}{2\alpha\sqrt{\delta t}} = y;$$

et l'équation (18) devient

$$X\,e^{-X^2} = y\,e^{-y^2}. \tag{19}$$

b. Cas d'une surface focale ponctuelle. — La température a pour expression

$$U = \frac{Q_1}{2\pi kr}\,\mathrm{erfc}\,\frac{r}{2\alpha\sqrt{t}}.$$

L'équation qui donne l'époque δt du maximum de température à la distance a du foyer s'obtient facilement :

$$(\Delta t+\delta t)^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{a^2}{4\alpha^2(\Delta t+\delta t)}} = \delta t^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{a^2}{4\alpha^2\delta t}}.$$

Si l'on extrait la racine cubique des deux membres et si l'on pose

$$X = \frac{a}{2\alpha\sqrt{3}\sqrt{\Delta t+\delta t}}, \qquad y = \frac{a}{2\alpha\sqrt{3}\sqrt{\delta t}},$$

cette équation prend la forme

$$X\,e^{-X^2} = y\,e^{-y^2}$$

identique à (19).

On trouve facilement dans les tables les valeurs correspondantes de X et y qui satisfont à l'équation (19), ce qui permet d'établir, par exemple, le tableau ci-dessous.

TABLEAU I ([1]).

X.	y.	X.	y.	X.	y.	X.	y.
0,02	2,335	0,08	1,760	0,24	1,330	0,64	0,776
0,04	1,975	0,12	1,617	0,32	1,190	0,70	0,70
0,06	1,853	0,16	1,506	0,48	0,962	–	–

On en déduit en fonction du temps de pose Δt l'époque δt du maximum de température à la profondeur a, le temps δt étant compté à partir de la fin du temps de pose, la profondeur a ayant pour valeur 1, 2 et 3 mm, et ceci respectivement dans le cas des foyers de dimensions illimitées et des foyers ponctuels sur une anticathode de tungstène. Dans les Tableaux II et III ci-dessous, on a compté Δt et δt en secondes.

On voit qu'après une impulsion brève ($\Delta t = 0$) le maximum de température se produit aux profondeurs de 1, 2 et 3 mm au bout de temps δt qui sont entre eux comme les carrés des profondeurs, ce qui caractérise bien l'impossibilité de définir une vitesse de propagation de la chaleur. De plus, pour les temps de pose longs la quantité δt est négligeable, et il en est donc de même de l'accroissement de température correspondant. Pour les temps de pose très courts la quantité δt est plus importante, mais nous verrons plus tard que, dans ces cas, la charge de l'anticathode est limitée par la température atteinte à la surface de l'anticathode.

TABLEAU II.

Foyer illimité.

a = 1 mm.		a = 2 mm.		a = 3 mm.	
Δt.	δt.	Δt.	δt.	Δt.	δt.
2,72	0,0011	2,72	0,0056	2,72	0,0131
0,67	0,0014	0,67	0,0077	0,67	0,0224
0,17	0,0019	0,16	0,0123	0,13	0,0423
0,04	0,0031	0,033	0,029	0,03	0,068
0	0,0089	0	0,0356	0	0,08

TABLEAU III.

Foyer ponctuel.

a = 1 mm.		a = 2 mm.		a = 3 mm.	
Δt.	δt.	Δt.	δt.	Δt.	δt.
3,6	0,00025	3,6	0,00168	3,6	0,0037
0,91	0,00037	0,91	0,00187	0,91	0,0050
0,22	0,00045	0,22	0,0025	0,21	0.0072
0,057	0,00068	0,053	0,004	0,043	0,0142
0	0,0029	0	0,0116	0	0,0261

Par conséquent, dans toutes les applications numériques nous pourrons négliger cet effet d'accroissement de la température à l'intérieur de l'anticathode après cessation de la charge du foyer.

7. Applications numériques. Température maxima atteinte au foyer et derrière la cible d'une anticathode. — Les tubes à rayons X que nous considérons sont tels que la normale à la face frontale de l'anticathode fait un angle de 20° avec l'axe du tube. Pour qu'un foyer rectangulaire soit vu selon une direction perpendiculaire à l'axe du

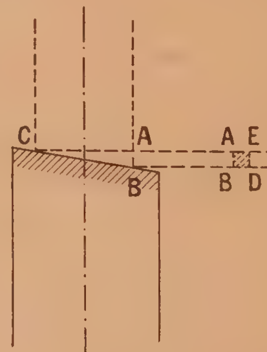


Fig. 9.

([1]) Dans les tableaux, les longueurs sont mesurées en millimètres, les temps (t Δt δt) en secondes, les températures (U) en degrés centigrades, les charges spécifiques (Q) en kilowatts par centimètre carré, les charges (Q'_1) en kilowatts.

tube suivant un carré; il faut que le rapport des deux côtés du foyer soit égal à sin 20° (*fig.* 9).

D'où :

$$\frac{AB}{BC} = \sin 20°,$$

$$BC = 2{,}924\, AB = 2{,}924\, BD.$$

Il est évident que la température maxima sera atteinte au centre du foyer si nous le supposons uniformément chargé.

D'autre part, pour simplifier les calculs numériques, il y a intérêt à décomposer le foyer en un nombre de secteurs circulaires aussi réduit que possible. Nous remplacerons donc le foyer rectangulaire réel représenté en trait plein par l'ensemble des secteurs de rayons R_1 et R_2 représentés en trait ponctué (*fig.* 10).

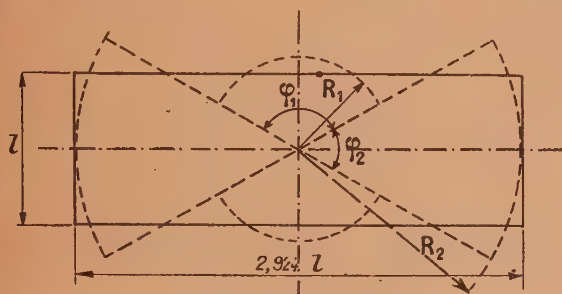


Fig. 10.

Les quantités R_1, R_2, φ_1 et φ_2 ont été déterminées de façon que le foyer fictif ait une surface équivalente à celle du foyer réel et que sa forme, au voisinage du centre, se rapproche le plus possible de la forme du foyer réel. On a été ainsi conduit à adopter

$$R_1 = 0{,}5642\, l, \qquad R_2 = 1{,}462\, l;$$

$$\varphi_1 = 2{,}085 \text{ radians}, \qquad \varphi_2 = 1{,}057 \text{ radian}.$$

De plus, nous avons utilisé les constantes thermiques du tungstène et du cuivre données par A. Bouwers (*Z. Techn. Physik*, 1927, **8**, 271) :

$$k_1 = 0{,}4, \qquad \mu_1 c_1 = 0{,}7;$$

$$k_2 = 0{,}9, \qquad \mu_2 c_2 = 1;$$

d'où

$$\alpha_1 = 0{,}756, \qquad \alpha_2 = 0{,}95;$$

$$m = \frac{\dfrac{k_2}{\alpha_2} - \dfrac{k_1}{\alpha_1}}{\dfrac{k_2}{\alpha_2} + \dfrac{k_1}{\alpha_1}} = 0{,}285,$$

$$Q = 20 \text{ kW} : \text{cm}^2 = 4\,780 \text{ cal} : \text{s} : \text{cm}^2.$$

Dans ces conditions, les formules donnant les températures dans l'axe du foyer, d'une part à la surface du foyer (U_{Cu}), d'autre part derrière la cible (U_W) prennent la forme

Termes.

$$U_W = 11\,950 \times 1{,}512\sqrt{t} \qquad \text{A}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \left[\frac{2 \times 2{,}085}{2\pi} \,\text{ierfc}\, \frac{R_1}{1{,}512\sqrt{t}} \right.\right.$$

$$\left. + \frac{2 \times 1{,}057}{2\pi} \,\text{ierfc}\, \frac{R_2}{1{,}512\sqrt{t}} \right] \qquad \text{B}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-0{,}285)^n \times 2 \,\text{ierfc}\, \frac{2na}{1{,}512\sqrt{t}} \qquad \text{C}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-0{,}285)^n$$

$$\times 2 \left[\frac{2 \times 2{,}085}{2\pi} \,\text{ierfc}\, \frac{\sqrt{R_1^2 + (2na)^2}}{1{,}512\sqrt{t}} \right.$$

$$\left.\left. + \frac{2 \times 1{,}057}{2\pi} \,\text{ierfc}\, \frac{\sqrt{R_2^2 + (2na)^2}}{1{,}512\sqrt{t}} \right] \right\}; \qquad \text{D}$$

$$U_{Cu} = 11\,950 \times 0{,}715 \times 1{,}512\sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-0{,}285)^n$$

$$\times \left\{ \text{ierfc}\, \frac{(2n+1)a}{1{,}512\sqrt{t}} - \frac{2 \times 2{,}085}{2\pi} \,\text{ierfc}\, \frac{\sqrt{R_1^2 + (2n+1)^2 a^2}}{1{,}512\sqrt{t}} \right.$$

$$\left. - \frac{2 \times 1{,}057}{2\pi} \,\text{ierfc}\, \frac{\sqrt{R_2^2 + (2n+1)^2 a^2}}{1{,}512\sqrt{t}} \right\}.$$

On voit que l'expression donnant U_W peut se décomposer en quatre termes de la façon suivante :

A. Température à la surface focale d'une anticathode homogène, les dimensions du foyer étant infinies.

B. Correction pour un foyer limité sur une anticathode homogène.

C. Correction pour une anticathode bimétallique, le foyer étant infini.

D. Complément de correction pour une anticathode bimétallique, le foyer étant limité.

Nous avons appliqué ces formules pour des temps de pose de 0,014, 0,056, 0,224, 0,896 et 3,584 s, des épaisseurs de cible de tungstène de 1, 2 et 3 mm à des foyers dont la largeur est de 1,4, 3,3 et 4,5 mm.

On trouve, dans Carslaw et Jaeger (*Conduction of Heat in Solids*, p. 373) une table des valeurs de la fonction ierfc x qui couvre tout le domaine des valeurs utiles de la fonction. Les valeurs de la variable sont suffisamment nombreuses pour permettre une interpolation précise quand c'est nécessaire.

Les résultats sont rassemblés dans les tableaux ci-contre.

Tableau IV.

(*Foyer de* 1,4 × 4,2 mm).

	$a=1$.		$a=2$.		$a=3$.		$a=\infty$.
t.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.
0,014...	837	133	856	23	856	3	856
0,056...	1 025	277	1 100	116	1 112	47	1 114
0,224...	1 119	369	1 217	204	1 252	128	1 271
0,896...	1 166	408	1 267	252	1 307	168	1 354
3,584...	1 188	420	1 290	284	1 330	195	1 395

Tableau V.

(*Foyer de* 3,3 × 9,9 mm).

	$a=1$.		$a=2$.		$a=3$.		$a=\infty$.
t.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.
0,014...	1 106	234	1 142	45	1 142	6	1 142
0,056...	1 611	621	1 795	310	1 842	158	1 848
0,224...	2 020	978	2 280	677	2 410	519	2 508
0,896...	2 282	1 217	2 551	931	2 705	792	2 955
3,584...	2 330	1 342	2 665	1 051	2 825	947	3 170

Tableau VI.

(*Foyer de* 4,5 × 13,5 mm).

	$a=1$.		$a=2$.		$a=3$.		$a=\infty$.
t.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W
0,014...	1152	254	1189	50	1190	6	1190
0,056...	1785	754	2030	388	2075	176	2082
0,224...	2372	1309	2735	935	2925	649	3072
0,896...	2800	1731	3170	1365	3405	1068	3805
3,584...	3025	1963	3410	1584	3650	1292	4235

8. Applications numériques. Détermination de l'épaisseur optima de la cible de tungstène. — Nous adopterons pour températures maxima de fonctionnement d'une anticathode les valeurs suivantes :

$$T_W = 2\,800\,°C, \qquad T_{Cu} = 1\,000\,°C.$$

Tenons compte du fait que la température moyenne d'une anticathode pendant une journée de travail peut être prise égale à 100° C, ce qui laisse, pour l'élévation de température admissible au moment d'une radiographie :

$$U_W = T_W - T_0 = 2\,700°,$$
$$U_{Cu} = T_{Cu} - T_0 = 900°,$$

ce qui donne

$$\frac{U_W}{U_{Cu}} = 3.$$

Les rapports $\frac{U_W}{U_{Cu}}$ pour les foyers étudiés précédemment sont donnés pour les valeurs du temps de pose

$$t = 0{,}224 \text{ s}, \qquad t = 0{,}896 \text{ s}$$

dans le Tableau VII ci-dessous.

Tableau VII.

Valeur du rapport $\frac{U_W}{U_{Cu}}$.

Foyer....	1,4×4,2 mm.		3,3×9,9 mm.		4,5×13,5 mm.	
a. t.....	0,224.	0,896.	0,224.	0,896.	0,224.	0,896.
1.........	3,03	2,86	2,06	1,88	1,81	1,62
2.........	6,03	5,03	3,37	2,74	2,93	2,32
3.........	9,8	7,8	4,64	3,42	4,5	3,18

Nous voulons déterminer pour chacun des trois foyers étudiés l'épaisseur de cible qui donne au rapport $\frac{U_W}{U_{Cu}}$ la valeur optima 3 pour chacun des temps de pose considérés : 0,224 et 0,896 s. Pour cela, il suffit d'utiliser les chiffres du Tableau VII en leur appliquant la formule d'interpolation de Lagrange.

On obtient ainsi :

Tableau VIII.

Épaisseur optima de la cible de tungstène (en mm).

t. Foyer......	1,4×4,2 mm.	3,3×9,9 mm.	4,5×13,5 mm.
0,224...........	0,99	1,71	2,05
0,896...........	1,07	2,36	2,81

En appliquant de nouveau la formule d'interpolation de Lagrange aux chiffres des Tableaux IV, V et VI on obtient, pour les épaisseurs optima, des cibles de tungstène les températures suivantes :

Tableau IX.

Foyer....	1,4×4,2 mm.				3,3×9,9 mm.				4,5×13,5 mm.			
	$a = 0{,}99$.		$a = 1{,}07$.		$a = 1{,}71$.		$a = 2{,}36$.		$a = 2{,}05$.		$a = 2{,}81$.	
t.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.	U_W.	U_{Cu}.
0,014...........	837	135	839	122	1 135	84	1 142	13	1 190	55	1 190	14
0,056...........	1 024	279	1 031	263	1 757	384	1 829	237	2 037	399	2 066	311
0,224...........	1 113	371	1 126	355	2 235	745	2 339	603	2 760	920	2 905	699
0,896...........	1 165	410	1 173	391	2 488	1 008	2 610	870	3 185	1 382	3 366	1 122
3,584...........	1 187	422	1 195	409	2 585	1 116	2 745	993	3 425	1 601	3 617	1 340

On en déduit les régimes de charge indiqués dans les tableaux ci-après et dans lesquels Q représente la charge spécifique du foyer exprimée en kilowatts par centimètre carré et Q_1 la charge totale du foyer en kilowatts.

TABLEAU X.

Charge du foyer de 1,4 × 4,2 mm.

	$a = 0,99$				$a = 1,07$			
t.	Q.	Q_1.	U_W.	U_{Cu}.	Q.	Q_1.	U_W.	U_{Cu}.
0,014...	64,5	3,69	2700	434	64,4	3,68	2700	392
0,056...	52,8	3,02	2700	737	52,3	2,95	2700	688
0,224...	48,5	2,78	2700	900	47,9	2,74	2700	851
0,896...	43,8	2,51	2560	900	46	2,63	2700	900
3,584...	42,6	2,44	2530	900	44	2,52	2630	900

TABLEAU XI.

Charge du foyer de 3,3 × 9,9 mm.

	$a = 1,71$				$a = 2,36$			
t.	Q.	Q_1.	U_W.	U_{Cu}.	Q.	Q_1.	U_W.	U_{Cu}.
0,014...	47,6	15,1	2700	200	47,2	15	2700	31
0,056...	30,7	9,8	2700	590	29,5	9,4	2700	350
0,224...	24	7,6	2700	900	23	7,3	2700	697
0,896...	19,6	6,2	2220	900	20,6	6,6	2700	900
3,584...	16	5,1	2080	900	18,1	5,8	2485	900

TABLEAU XII.

Charge du foyer de 4,5 × 13,5 mm.

	$a = 2,05$				$a = 2,81$			
t.	Q.	Q_1.	U_W.	U_{Cu}.	Q.	Q_1.	U_W.	U_{Cu}.
0,014...	45,4	26,9	2700	125	45,4	26,9	2700	32
0,056...	26,5	15,7	2700	530	26,1	15,5	2700	406
0,224...	19,6	11,6	2700	900	18,6	11	2700	649
0,896...	13	7,2	2070	900	16,3	9,7	2700	900
3,584...	11,2	6,6	1930	900	13,4	8	2425	900

Si l'on trace la courbe de la charge d'un foyer (*fig.* 11) en fonction du temps de pose on constate que cette courbe comporte un point anguleux (A, B) qui correspond au temps de pose pour lequel on a simultanément $U_W = 2700°$ C et $U_{Cu} = 900°$ C. Ce point anguleux sépare la région des faibles temps de pose pour lesquels la charge appliquée au foyer est limitée par la température atteinte par le tungstène, de la région des forts temps de pose pour lesquels la charge appliquée au foyer est limitée par la température atteinte par le cuivre.

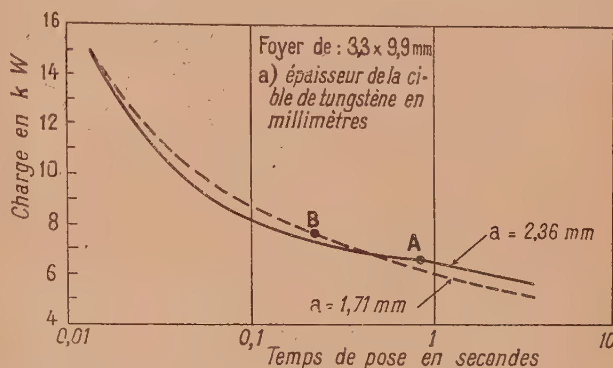


Fig. 11.

Les résultats obtenus ci-dessus supposent que la charge spécifique du foyer est constante. On peut augmenter la charge totale appliquée à un foyer en répartissant l'énergie à sa surface de façon qu'en tous ses points soit atteinte la température maxima de 2 700° C. Ceci conduit à augmenter la charge spécifique sur les bords du foyer par rapport à ce qu'elle est au centre.

Mais si cet effet est exagéré on peut être amené à diminuer la charge totale appliquée au foyer pour que la température maxima atteinte n'excède pas 2 700° C, bien que l'endroit de ce maximum de température ne soit plus le centre du foyer.

L'exposé qui précède représente la partie théorique de tout un ensemble de travaux sur la charge des foyers des tubes à rayons X entrepris dans les laboratoires de recherche de la Compagnie générale de Radiologie.

Manuscrit reçu le 7 juin 1950.

CHAUFFAGE PAR INDUCTION D'UNE SPHÈRE MÉTALLIQUE CREUSE

Par M. Antoine COLOMBANI.

Sommaire. — J. J. Thomson a montré le premier qu'un tube métallique soumis à un champ magnétique périodique axial présente un maximum de puissance dissipée par courants de Foucault pour une valeur optima de son épaisseur. G. Ribaud retrouva et vérifia expérimentalement ce résultat. Il signala également un phénomène analogue dans le cas du disque métallique mince de dimensions finies perpendiculaire au champ.

J'ai pu, dans le cas d'une sphère creuse d'épaisseur faible, mettre en évidence un optima semblable aux précédents et susceptible d'applications intéressantes dès l'instant où l'on se propose de faire absorber par une couche métallique sphérique un maximum d'énergie.

Les calculs en coordonnées sphériques font intervenir normalement les fonctions de Bessel et de Legendre. Ils deviennent rapidement très compliqués du fait des « conditions aux limites ».

Cependant, en utilisant la notion de potentiel magnétique, j'ai pu éviter l'introduction des fonctions sphériques et aboutir très rapidement à un résultat qui n'avait pas encore été mis en évidence.

Considérons une sphère métallique creuse placée dans un champ magnétique périodique et uniforme $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos\omega t$ (*fig.* 1). Par induction, des cou-

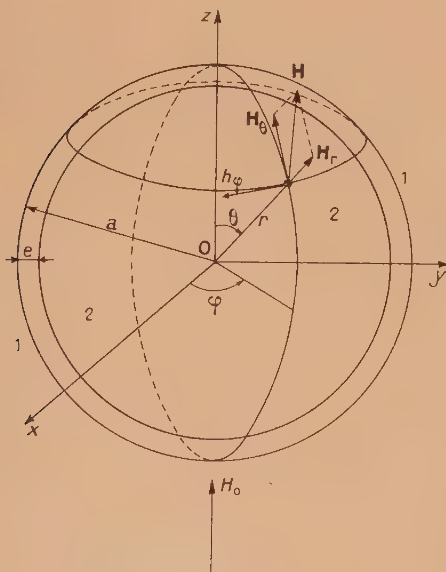


Fig. 1.

rants de Foucault se développent dans le métal. Pour écrire les relations de Maxwell qui relient les champs entre eux à l'intérieur comme à l'extérieur du métal, nous supposerons le régime quasi stationnaire. Jusqu'à des fréquences élevées, nous savons que cette approximation est bien justifiée [1, 2]. Nous nous placerons d'autre part dans le cas où l'épaisseur de pénétration $\varepsilon = (2\pi\omega\gamma)^{-\frac{1}{2}}$ (ω, pulsation; γ, conductibilité) est grande vis-à-vis de l'épaisseur du métal. Pour des fréquences assez élevées, cette épaisseur sera donc celle d'une couche mince métallique.

Ceci posé, remarquons que les trajectoires circulaires des courants de Foucault dans le métal sont situées dans des plans perpendiculaires au champ inducteur $\mathbf{H}$.

En coordonnées sphériques les composantes $\mathbf{h}_r$ et $\mathbf{h}_\theta$ du champ électrique $\mathbf{h}$ sont donc nulles ainsi que la composante $\mathbf{H}_\varphi$ du champ magnétique

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{h}_\theta = \mathbf{H}_\varphi = 0.$$

Les équations générales

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\gamma\,\mathbf{h},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0.$$

se réduisent alors aux suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,\mathbf{h}_\varphi) = -r^2\sin\theta\,\frac{\partial \mathbf{H}_r}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\,\mathbf{h}_\varphi) = r\sin\theta\,\frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{H}_\theta) - \frac{\partial \mathbf{H}_r}{\partial\theta} = 4\pi\gamma\, r\,\mathbf{h}_\varphi, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mathbf{H}_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\mathbf{H}_\theta) = 0. \tag{4}$$

En négligeant les termes de second ordre (qui sont continus) l'intégration de l'égalité (3) sur l'épaisseur *e très petite* de la couche conduit à la relation

$$4\pi\gamma a e h_\varphi = [rH_\theta]_2^1, \qquad (5)$$

a étant le rayon extérieur de la sphère.

Les notations 1 et 2 désignent les milieux extérieurs au métal de la couche. Le chiffre 1 se rapporte à l'espace extérieur, et le chiffre 2 à la cavité interne.

L'égalité (5) permet d'écrire

$$4\pi\gamma a e \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, h_\varphi) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, H_\theta)\right]_2^1.$$

Or, d'après (1) :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, h_\varphi) = -r\sin\theta\frac{\partial H_r}{\partial t} \qquad \text{(en 1 comme en 2).}$$

De plus, d'après (4) :

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2 H_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, H_\theta) = 0.$$

Par conséquent, on déduit que

$$4\pi\gamma a e\frac{\partial}{\partial t}(rH_r)_1 = 4\pi\gamma a e\frac{\partial}{\partial t}(rH_r)_2 = \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 H_r)\right]_2^1.$$

Ces relations se refèrent au champ H_r à la limite de la couche, mais à l'intérieur de celle-ci. Par continuité, on peut écrire en fonction des potentiels ψ_1 et ψ_2 en (1) et (2) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\right) = \frac{k}{2ae}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right]_2^1, \qquad (6)$$

avec

$$k = \frac{1}{2\pi\gamma}.$$

Détermination des potentiels. — Prenons comme potentiel inducteur :

$$\psi_0 = -H_0 r\cos\theta\, e^{j\omega t}. \qquad (7)$$

La présence des courants induits perturbe ce potentiel et conduit à écrire

$$\psi_1 = \psi_0 + \frac{a^3}{r^2}A_1\cos\theta\, e^{j\omega t}, \qquad (8)$$

$$\psi_2 = \psi_0 + A_2 r\cos\theta\, e^{j\omega t}. \qquad (9)$$

Ces formes satisfont aux conditions générales de régularité et le champ extérieur se réduit bien au champ inducteur à grande distance.

Elles satisfont d'autre part aux conditions aux limites des égalités (6) si

$$j\omega[-H_0 + A_2] = j\omega[-H_0 - 2A_1] = \frac{k}{ae}[A_1 - A_2].$$

D'où

$$A_1 = \frac{-A_2}{2} = \frac{-H_0}{2\left(1 + \frac{3k}{2j\omega a e}\right)}.$$

Soit

$$A_1 = \frac{-A_2}{2} = -\frac{H_0(1+j\alpha)}{2(1+\alpha^2)},$$

en posant

$$\alpha = \frac{3k}{2\omega a e} = \frac{3}{4\pi\omega\gamma a e} = \frac{3\varepsilon^2}{2ae}.$$

D'où

$$\psi_1 = -\left[r + \frac{(1+j\alpha)}{2(1+\alpha^2)}\frac{a^3}{r^2}\right]H_0\cos\theta\, e^{j\omega t},$$

$$\psi_2 = -r\left[1 - \frac{1+j\alpha}{1+\alpha^2}\right]H_0\cos\theta\, e^{j\omega t}.$$

En prenant les parties réelles et en posant $\operatorname{tg}\chi = \alpha$ on en déduit les valeurs de ψ_1 et ψ_2 correspondantes au potentiel inducteur ψ_0 :

$$\psi_1 = -H_0\cos\theta\left[r\cos\omega t + \frac{a^3}{2r^2}\cos\chi\cos(\omega t + \chi)\right], \qquad (10)$$

$$\psi_2 = rH_0\cos\theta[-\cos\omega t + \cos\chi\cos(\omega t + \chi)]. \qquad (11)$$

Les termes additionnels représentant les perturbations de potentiel dues aux courants induits.

Nous voyons déjà qu'à l'intérieur de la sphère, la présence des courants de Foucault produit un champ de sens opposé au champ inducteur H_0, d'amplitude égale à $H_0\cos\chi$ et déphasé d'un angle

$$\chi = \operatorname{arctg}\frac{3\varepsilon^2}{2a}.$$

Calcul des champs. — En supposant les perméabilités égales à l'unité, la valeur des champs dans les milieux 1 et 2 s'obtient directement à partir de ψ_1 et ψ_2 : On a

$$H_{r_1} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = H_0\cos\theta\left[\cos\omega t - \frac{a^3}{r^3}\cos\chi\cos(\omega t + \chi)\right], \qquad (12)$$

$$H_{\theta_1} = -\frac{\partial\psi_1}{r\,\partial\theta} = -H_0\sin\theta\left[\cos\omega t + \frac{a^3}{2r^3}\cos\chi\cos(\omega t + \chi)\right], \qquad (13)$$

$$H_{r_2} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial r} = H_0\cos\theta[\cos\omega t - \cos\chi\cos(\omega t + \chi)], \qquad (14)$$

$$H_{\theta_2} = -\frac{\partial\psi_2}{r\,\partial\theta} = H_0\sin\theta[-\cos\omega t + \cos\chi\cos(\omega t + \chi)], \qquad (15)$$

$$h_{\varphi_1} = -\frac{H_0}{2}\omega r\sin\theta\left[\sin\omega t - \frac{a^3}{r^3}\cos\chi\sin(\omega t + \chi)\right], \qquad (16)$$

$$h_{\varphi_2} = -\frac{H_0}{2}\omega r\sin\theta[\sin\omega t - \cos\chi\sin(\omega t + \chi)]. \qquad (17)$$

A la limite pour $r = a$, on a

$$h_{\varphi_1} = h_{\varphi_2} = -\frac{H_0}{2}\omega a\sin\theta[\sin\omega t - \cos\chi\sin(\omega t + \chi)]. \qquad (18)$$

C'est le champ électrique dans la couche métallique (la composante tangentielle du champ électrique est continue).

Remarques. — 1° *Toujours dans la condition* $\varepsilon \gg e$ si la fréquence est suffisamment élevée pour que $\operatorname{tg}\chi = \alpha = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon^2}{ae}$ soit *très petit*, on constate facilement qu'à l'extérieur de la sphère (région 1) les formules donnant les champs deviennent

$$H_{r_1} = H_0\left[1 - \frac{a^3}{r^3}\right]\cos\theta\cos\omega t, \quad (19)$$

$$H_{\theta_1} = - H_0\left[1 + \frac{a^3}{2r^3}\right]\sin\theta\cos\omega t, \quad (20)$$

$$h_{\varphi_1} = -\frac{\omega r}{2} H_0\left[1 - \frac{a^3}{r^3}\right]\sin\theta\sin\omega t. \quad (21)$$

La densité superficielle de courant i_s est donnée à partir de H_{θ_1} pour $r = a$ par la relation

$$4\pi i_s = H_{\theta_1} = -\frac{3}{2}H_0\sin\theta.$$

D'où

$$i_s = -\frac{3}{8\pi}H_0\sin\theta.$$

On retrouve des formules déjà établies dans le cas de la sphère conductrice pleine pour des fréquences élevées [2, 4, 6].

2° A l'intérieur de la cavité sphérique, le champ résultant magnétique

$$H_t = H_{r_2}\cos\theta - H_{\theta_2}\sin\theta$$

vaut, tous calculs faits :

$$H_t = H_0\sin\chi\sin(\omega t + \chi)$$

et le champ électrique ($h_t = h_\varphi$) :

$$h_t = -H_0\frac{\omega r}{2}\sin\theta\sin\chi\cos(\omega t + \chi) \quad (^1).$$

Si α est grand (basse fréquence), on peut écrire

$$\sin\chi = 1 - \frac{2}{9}\frac{a^2e^2}{\varepsilon^4}.$$

D'où

$$H_t = \left(1 - \frac{2}{9}\frac{a^2e^2}{\varepsilon^4}\right)H_0\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= H_0\left(1 - \frac{2}{9}\frac{a^2e^2}{\varepsilon^4}\right)\cos\omega t,$$

$$h_t = -\left(1 - \frac{2}{9}\frac{a^2e^2}{\varepsilon^4}\right)H_0\frac{\omega r}{2}\sin\theta\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{2}{9}\frac{a^2e^2}{\varepsilon^4}\right)\frac{\omega r}{2}H_0\sin\theta\sin\omega t.$$

Le champ H_0 est peu perturbé.

Si α est très petit, en remplaçant $\sin\chi$ par α, on obtient

$$H_t = \frac{3\varepsilon^2}{2ae}H_0\sin\omega t,$$

$$h_t = -\frac{3\varepsilon^2}{2ae}\frac{\omega r}{2}H_0\cos\omega t.$$

Le champ magnétique *résultant* est négligeable.

Enfin, un cas particulièrement intéressant est celui où $\alpha = 1$, comme nous le verrons plus loin. On trouve alors dans la cavité

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{2}}H_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$h_t = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\omega r H_0\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Si la condition $\alpha = 1$ $\left(\frac{3\varepsilon^2}{2ae} = 1\right)$ est réalisée, l'amplitude du champ magnétique intérieur vaut $\frac{H_0}{\sqrt{2}}$ et est déphasée de $-\frac{\pi}{4}$ sur le champ inducteur.

Calcul de la puissance dissipée dans le métal. — L'expression de la puissance dissipée par les courants de Foucault dans le métal est

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T\int_{a-e}^{a}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma h_\varphi^2\,d\tau,$$

avec

$$d\tau = r^2\sin\theta\,d\theta\,dr\,d\varphi$$

et

$$h_\varphi = -\frac{H_0\omega a}{2}\sin\theta[\sin\omega t - \cos\chi\sin(\omega t + \chi)].$$

On en déduit après intégration

$$W = H_0^2\frac{\pi}{3}\omega^2\gamma a^4 e\sin^2\chi = \frac{3}{2}H_0^2\frac{\omega a^4\varepsilon^2 e}{9\varepsilon^4 + 4a^2e^2}. \quad (22)$$

Cette dernière expression passe par un maximum pour une valeur optima de l'épaisseur

$$e_{\text{opt}} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon^2}{a}. \quad (23)$$

Pour cette valeur de e la puissance dissipée vaut

$$W_{\text{opt}} = \frac{H_0^2}{8}\omega a^3. \quad (24)$$

Elle est proportionnelle au cube du rayon et indépendante de la conductibilité. La représentation de W en fonction de e a donc l'aspect de la figure 2. Après un maximum pour $e_{\text{opt}} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon^2}{a}$ la puissance décroît rapidement. Lorsque l'épaisseur continue à croître, la formule (22) n'est plus valable et doit être remplacée par celle qui donne la puissance

(1) La valeur moyenne du vecteur de Poynting $\frac{1}{4\pi}H_{\theta_2}\wedge h_t$ est nulle. Il n'y a pas d'énergie dissipée dans la cavité sphérique.

dépensée en haute fréquence dans une sphère pleine de rayon $b + e$ (e étant la variable et b le rayon

Fig. 2.

intérieur de la sphère creuse considérée jusqu'ici). Cette puissance est

$$W_1 = \frac{3}{8} H_0^2 (b + e)^2 \omega \varepsilon, \qquad \text{avec} \quad b = a - e.$$

La courbe W_1 doit donc se raccorder avec W.

G. Ribaud [3], dans son étude sur le disque plan de faible épaisseur perpendiculaire au champ inducteur, trouve pour la puissance dissipée optima une valeur égale à (24) pour une épaisseur

$$e_{\text{opt}} = k \frac{\varepsilon^2}{a}$$

(a, rayon du disque, k, coefficient voisin de 2).

Je rappelle que J. J. Thomson a également obtênu une valeur optima pour l'épaisseur d'un tube indéfini soumis à un champ magnétique axial.

$$e_{\text{opt}} = \frac{\varepsilon^2}{a} \qquad \text{et} \qquad W_{\text{opt}} = \frac{1}{16} \omega a^2 H_0^2$$

(a, rayon moyen du tube).

Si nous calculons le rapport de la puissance optima donnée par l'expression (24) à la puissance dissipée dans une sphère pleine de même nature et de même diamètre, nous trouvons dans les mêmes conditions d'induction

$$\eta = \frac{W_{\text{opt}}}{W} = \frac{\frac{1}{8} H_0^2 \omega a^3}{\frac{3}{8} H_0^2 a^2 \omega \varepsilon} = \frac{a}{3\varepsilon} \quad (^2).$$

Ce rapport peut être très élevé. Je donne ci-dessous quelques exemples portant sur des couches sphériques de nature différente avec $a = 10$ mm, et pour deux fréquences 5.10^7 et 5.10^5.

	$f = 5.10^7$.			$f = 5.10^5$.		
Nature.	ε.	e_{opt}.	η.	ε.	e_{opt}.	η.
Cu tiède	10 μ	15 mμ	333	0,1 mm	1,5 μ	33
Métal :						
$\rho = 10.10^{-6}\ \Omega : \text{cm}$	20 μ	60 mμ	166	0,2 mm	6 μ	16
$\rho = 100.10^{-6}\ \Omega : \text{cm}$	70 μ	0,7 μ	50	0,7 mm	73 μ	5
Graphite	220 μ	7,2 μ	15	2,2 mm	0,72 mm	1,5

Il est certain, par analogie avec le problème du disque plan, que l'existence de l'optima de puissance dans le cas de la sphère creuse, peut présenter un grand intérêt pour le chauffage de certains corps, ou dans les études de bolométrie. Dans ce dernier cas, l'épaisseur optima très faible peut être obtenue par dépôt métallique sur un support sphérique ou un tube cylindrique isolants. J'espère pouvoir revenir ultérieurement sur cette question.

Signalons enfin que le rapport de la puissance dissipée dans la couche (22) *à celle qui serait dissipée dans les mêmes conditions dans une sphère pleine de même rayon, tend vers la limite*

$$\beta = \frac{\varepsilon}{e} \qquad (e < \varepsilon)$$

quand le rayon a de la sphère croît indéfiniment. Le même raisonnement, appliqué au tube indéfini de J. J. Thomson, conduit *au même résultat*, ce qui est bien normal.

Remarque. — On peut également calculer la puissance dissipée par l'intermédiaire du vecteur de Poynting.

La valeur moyenne du flux de ce vecteur sur la surface extérieure de la couche est en effet

$$W = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^\pi \int_0^{2\pi} h_{\varphi_1} \wedge H_{0_1} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

avec (pour $r = a$) :

$$H_{\theta_1} = -H_0 \sin\theta \left[\cos\omega t + \frac{1}{2} \cos\chi \cos(\omega t + \chi) \right],$$

$$h_{\varphi_1} = -H_0 \frac{\omega a}{2} \sin\theta [\sin\omega t - \cos\chi \sin(\omega t + \chi)].$$

On trouve

$$W = \frac{H_0^2 \omega a^3}{2} \sin\chi \cos\chi = \frac{3}{2} H_0^2 \omega a^4 \frac{\varepsilon^2 e}{4 a^2 e^2 + 9 \varepsilon^4},$$

(2) Pour le cas J. J. Thomson, on trouve $\eta = \frac{a}{2\varepsilon}$.

expression identique au résultat déjà obtenu (22).

Enfin, la valeur moyenne du flux dans la cavité est

$$W = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\pi\int_0^{2\pi} h_{\varphi_2} \wedge H_{\theta_2} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

avec

$$H_{\theta_2} = H_0 \sin\theta [-\cos\omega t + \cos\chi \cos(\omega t + \chi)],$$

$$h_{\varphi_2} = -H_0 \frac{\omega a}{2} \sin\theta [\sin\omega t - \cos\chi \sin(\omega t + \chi)].$$

On vérifie qu'elle est nulle, ce qui est évident puisqu'il n'y a pas de puissance dissipée dans cet endroit.

Manuscrit reçu le 21 avril 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Thomson J. J. — Recent Researches.

[2] Colombani A. — Étude sur les courants de Foucault. *J. Phys.*, 1948, **9**, 273-286. Détermination de la perméabilité apparente et du facteur de qualité en haute fréquence d'une poudre magnétique. *J. Phys.*, 1950, **11**, 201

[3] Ribaud G. — Chauffage par induction d'un disque circulaire mince normal aux lignes de champ. *J. Phys.*, 1946, **7**, 000.

[4] Jouguet M. — Courants de Foucault et fours à induction (Gauthier-Villars).

[5] Poynting. — On the transfer of Energy in the Electromagnetic Field. *Phil. Trans.*, 1884, Part. II, 343.

[6] Clerk Maxwell. — Traité d'Électricité et de Magnétisme, II.

un

ÉQUATIONS DU CHAMP, ÉQUATIONS DU MOUVEMENT ET FONCTIONS D'ONDE. I.

Par ANTONIO GIÃO.

Sommaire. — Après avoir esquissé la déduction des équations du champ dans notre théorie unitaire des champs et de la Mécanique ondulatoire relativiste, nous déduisons les équations du mouvement pour les fluides élémentaires (de matière et d'électricité) des propriétés essentielles de conservation de deux tenseurs du second ordre (d'énergie-impulsion) à trace non identiquement nulle qui interviennent dans les équations du champ, ainsi que de la conservation des vecteurs courants correspondants. La réaction du rayonnement et les forces dépendant du spin des particules et de la non-homogénéité des champs font leur apparition dans les équations quand on opère la transition des particules infinitésimales (équations densitaires) vers des particules à masse et charge finies.

I. — La Géométrie différentielle et les équations du champ.

1. Préliminaires. — Considérons un espace continu V_{N+1} à un nombre quelconque $N+1$ de dimensions. Il est toujours possible d'imposer à V_{N+1} une connexion ou structure interne qui induit sur toute hypersurface V_N de V_{N+1} une *structure interne* correspondante caractérisée par un ensemble d'invariants. De plus, chaque V_N possède, par rapport à l'espace ambiant V_{N+1}, une *structure externe* ou *forme* caractérisée par un autre ensemble d'invariants. La structure interne de V_{N+1} peut toujours être choisie riemannienne, au moins localement. Cela signifie qu'étant donnés des voisinages finis D_{N+1} d'un point quelconque de V_{N+1}, on peut y définir des ensembles de systèmes de coordonnées X^μ, $\overline{X}^\mu$, ... ($\mu = 1, \ldots, N+1$) avec des équations de transformation $\overline{X}^\mu = f^\mu(X^1, \ldots, X^{N+1})$ à jacobiens partout non nuls dans D_{N+1}. Tout ensemble de $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ fonctions bornées

$$\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, N+1)$$

de l'un de ces systèmes de coordonnées X^μ dans un D_{N+1} donné peut alors être pris, quand le déterminant $|\Gamma_{\mu\nu}| \neq 0$, comme base pour la formation d'un tenseur fondamental Γ en imposant à ces fonctions, dans D_{N+1}, la loi tensorielle

$$\overline{\Gamma}_{\mu\nu} = \Gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial \overline{X}^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial \overline{X}^\nu}.$$

Supposons qu'un V_{N+1} peut être recouvert par un ensemble de domaines D_{N+1} tels que, dans toute région appartenant à deux D_{N+1} différents :

1° les coordonnées locales de l'un des D_{N+1} se transforment en coordonnées locales de l'autre D_{N+1} par des transformations à jacobien non nul;

2° les $\Gamma_{\mu\nu}$ de l'un des D_{N+1} deviennent identiques aux $\Gamma_{\mu\nu}$ de l'autre D_{N+1} par ces transformations. On dit alors que tout l'espace V_{N+1} a été pourvu d'une structure riemannienne globale définie par un tenseur fondamental Γ, en d'autres termes que V_{N+1} est alors une variété riemannienne globale ou un espace de Riemann global.

Soient $X^\mu = X^\mu(x^1, \ldots, x^N)$ les équations de l'hypersurface V_N de V_{N+1}, les x^i ($i = 1, \ldots, N$) désignant des coordonnées internes de V_N. Toute partie de V_N, où les dérivées $\frac{\partial^p X^\mu}{\partial^q x^i \ldots \partial^s x^k}$ de ces fonctions sont bien définies jusqu'à l'ordre p est appelée une partie différentiable d'ordre p de V_N. De même l'espace V_N, pris dans son ensemble, est une hypersurface différentiable d'ordre p quand il peut être considéré comme un ensemble de parties différentiables d'ordre p. En chaque point d'une partie différentiable d'ordre $p \geqq 1$ d'un V_N où le jacobien $\left|\frac{\partial X^\mu}{\partial x^i}\right|$ de N des $N+1$ fonctions $X^\mu(x^i)$ est différent de zéro, il existe une direction normale et un vecteur unitaire normal $\vec{n}$ dont les composantes satisfont à $n^\mu n_\mu = \Gamma_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 1$. En effet, l'équation $F(X^1, \ldots, X^{N+1}) = 0$ d'une telle partie de V_N peut s'écrire sous la forme

$$X^\rho - \varphi[x^1(X^1, \ldots, X^{\rho-1}, X^{\rho+1}, \ldots, X^{N+1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x^N(X^1, \ldots, X^{\rho-1}, X^{\rho+1}, \ldots, X^{N+1})] = 0.$$

Comme on a

$$n_\mu = \frac{1}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial X^\mu}; \qquad |\nabla F| = \left(\Gamma^{\mu\nu} \frac{\partial F}{\partial X^\mu} \frac{\partial F}{\partial X^\nu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on voit que le vecteur unitaire normal est partout bien défini.

La structure riemannienne que l'on peut toujours imposer, au moins localement, à l'espace ambiant V_{N+1} d'un V_N, induit sur toute partie différentiable d'ordre $p \geq 2$ de V_N une structure interne et externe complètement définie par deux tenseurs covariants symétriques du second ordre : le tenseur métrique interne (g_{ik}) et le tenseur métrique externe (ω_{ik}). Ils sont donnés par

$$g_{ik} = \Gamma_{\mu\nu} X^{\mu}_{;i} X^{\nu}_{;k}, \tag{1 a}$$

$$\omega_{ik} = X^{\mu}_{;ik} n_{\mu}, \tag{1 b}$$

où $X^{\mu}_{;i}$ désigne la dérivée covariante des X^{μ} par rapport aux x^i et $X^{\mu}_{;ik}$ la dérivée tensorielle des X^{μ} par rapport à x^i et x^k. Cette dérivée est donnée par

$$X^{\mu}_{;ik} = \frac{\partial^2 X^{\mu}}{\partial x^i \partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} X^{\mu}_{;l} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} X^{\alpha}_{;i} X^{\beta}_{;k}, \tag{2}$$

les symboles de Christoffel avec indices latins et grecs étant formés respectivement avec les g_{ik} et les $\Gamma_{\mu\nu}$. On peut déduire facilement de (1 *a*) que les $X^{\mu}_{;ik}$ sont les composantes contravariantes de vecteurs de V_{N+1} normaux à V_N, de sorte que $X^{\mu}_{;ik} = \omega_{ik} n^{\mu}$, d'où l'on déduit immédiatement (1 *b*).

Conformément à (1 *a*), une hypersurface différentiable V_N d'un V_{N+1} peut toujours être munie, au moins localement, d'une structure riemannienne, même quand il est impossible d'imposer à V_{N+1} une structure riemannienne globale. Telle est la condition nécessaire et suffisante pour la validité d'un théorème qui peut être considéré comme le théorème fondamental de la Géométrie différentielle des hypersurfaces et qui s'énonce comme suit :

Quand on connaît les tenseurs métriques interne et externe d'une hypersurface différentiable, l'hypersurface est par cela même déterminée dans son espace ambiant aux valeurs près de $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ paramètres. Ces paramètres sont ceux d'une translation et d'une rotation quand l'espace ambiant est homogène et isotrope. Inversement, quand on se donne *a priori* deux tenseurs covariants, symétriques et du second ordre $g_{ik}(x^j)$ et $\omega_{ik}(x^j)$ $[i, j, k = 1, \ldots, N]$, ils ne peuvent être les tenseurs métriques interne et externe d'une hypersurface V_N d'un espace V_{N+1} muni d'une structure interne de Riemann définie par le tenseur fondamental $\Gamma_{\mu\nu}$, que s'ils satisfont à un système d'équations de compatibilité exprimant les conditions d'intégrabilité de $X^{\mu}_{;ik} = \omega_{ik} n^{\mu}$ et que l'on appelle les équations de Gauss et de Codazzi de V_N dans V_{N+1} [*voir* plus loin, § 2, équations (7) et (8)].

Considérons maintenant une fonction

$$P\left(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}, \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}\right)$$

du tenseur métrique interne d'un V_N. Nous dirons que cette fonction est une *propriété intrinsèque* de la structure interne d'un V_N lorsqu'elle possède les mêmes propriétés générales que le tenseur g_{ik} sans se confondre identiquement avec lui, et lorsqu'elle satisfait, en outre, à la condition la plus générale, c'est-à-dire la moins restrictive, qui est nécessaire et suffisante pour déterminer sans ambiguïté sa forme analytique. La fonction P doit donc être un tenseur covariant symétrique et conservatif du second ordre (P_{ik}) et un théorème de Cartan [1] montre que sa forme analytique doit être nécessairement la suivante :

$$P_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}(R + \lambda_g) g_{ik}, \tag{3}$$

où R_{ik} désigne le tenseur de Ricci formé avec les g_{ik}, R l'invariant $g^{ik} R_{ik}$ et λ_g une constante absolue. Parallèlement à cette définition, le même théorème montre que la propriété intrinsèque de la structure externe d'un V_N est nécessairement le tenseur

$$\Omega_{ik} = S_{ik} - \frac{1}{2}(S + \lambda_\omega)\omega_{ik}, \tag{4}$$

où S_{ik} désigne le tenseur de Ricci *formé avec les* ω_{ik}, S l'invariant $\omega^{ik} S_{ik}$ (avec $\omega^{il}\omega_{lk} = \delta^i_k$) et λ_ω une constante absolue.

2. **Equations du champ.** — Considérons un Univers à N dimensions composé de deux parties de nature différente : une partie purement géométrique (espace) ou *contenant* et une partie physique proprement dite, le *contenu* de cet espace (matière, électricité, rayonnement, etc.) Supposons que cet Univers constitue un être complètement autonome et autodéterminé. La loi ou principe premier d'un tel Univers a évidemment le caractère d'une loi intrinsèque et doit consister en une relation déterminant complètement l'une par l'autre les deux parties qui forment l'Univers, c'est-à-dire le contenant et ses contenus. Si cette relation est de nature mathématique, alors il existe un être mathématique dont les propriétés peuvent être mises en correspondance biunivoque avec les propriétés de l'Univers, et cet être mathématique mérite le nom d'*être mathématique non arbitraire*, puisqu'il est complètement autonome et autodéterminé. De plus, la loi d'un Univers mathématique non arbitraire, c'est-à-dire la relation qui détermine complètement et mutuellement le contenant et ses contenus, doit exercer son action par l'intermédiaire de l'opérateur qui figure dans l'expression analytique des propriétés intrinsèques de la structure du contenant, puisque toute autre opération introduirait, dans l'Univers, un élément arbitraire. Pour exprimer la loi d'un Univers mathématique complètement autonome et autodéterminé, nous devons donc égaler les propriétés intrinsèques (P_{ik}, Ω_{ik}) de la structure du contenant

à des propriétés tensorielles des contenus, que nous désignerons par T_{ik} et U_{ik}. On obtient ainsi les équations

$$R_{ik} - \frac{1}{2}(R + \lambda_g) g_{ik} = T_{ik}, \quad (5)$$

$$S_{ik} - \frac{1}{2}(S + \lambda_\omega) \omega_{ik} = U_{ik}. \quad (6)$$

Ces équations ne forment pas encore un système complet d'équations du champ, parce que leurs solutions g_{ik}, ω_{ik} ne sont évidemment admissibles que si elles définissent une hypersurface V_N; en d'autres termes, ces solutions doivent satisfaire aux équations de compatibilité de Gauss

$$R_{ijkl} - (\omega_{ik}\omega_{jl} - \omega_{il}\omega_{jk}) = R_{\alpha\beta\gamma\delta} X^{\alpha}_{,i} X^{\beta}_{,j} X^{\gamma}_{,k} X^{\delta}_{,l} \quad (7)$$

et aux équations de compatibilité de Codazzi

$$\omega_{ik,j} - \omega_{ij,k} = \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha} X^{\beta}_{,i} X^{\gamma}_{,j} X^{\delta}_{,k}, \quad (8)$$

où R_{ijkl} désigne le tenseur de Riemann-Christoffel du contenant V_N, $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ le tenseur de Riemann-Christoffel de l'espace ambiant pris sur V_N et la virgule une dérivation covariante par rapport aux x^i. Les équations (5), (6), (7) et (8) sont les équations fondamentales du champ dans notre théorie unitaire [2] exprimant la loi d'un Univers mathématique complètement autonome et autodéterminé. Quand le contenant V_N est un espace de classe 1, c'est-à-dire une hypersurface d'un espace euclidien ou pseudo-euclidien, les seconds membres des équations de Gauss et de Codazzi sont identiquement nuls.

3. **Conséquences générales des équations du champ**. — Les équations du champ (5), (6), (7) et (8) peuvent être écrites *a priori* pour un nombre quelconque de dimensions du contenant V_N, mais nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

Le contenant d'un Univers mathématique complètement autonome et autodéterminé (être mathématique non arbitraire) est un espace à quatre dimensions et de classe 1.

Le système (5), (6), (7) et (8) ne peut avoir des solutions non arbitraires que si le nombre de ses équations indépendantes est égal au nombre de ses fonctions inconnues indépendantes ([1]). Il est clair que les inconnues indépendantes sont les fonctions g_{ik}, ω_{ik}, T_{ik} et U_{ik}. Leur nombre est $2N(N+1)$. (On doit remarquer que d'après la Géométrie différentielle les $X^{\mu}_{,i}$ et les n^{μ} peuvent être déduits de g_{ik} et ω_{ik}). Ces inconnues satisfont aux $N(N+1)$ équations (5) et (6), aux $\frac{N^2(N^2-1)}{12}$ équations de Gauss (7) et aux $\frac{N(N^2-1)}{3}$ équations de Codazzi (8), mais les équations de Codazzi ne sont pas toujours indépendantes des équations de Gauss. Pour déterminer le nombre d'équations de Gauss et de Codazzi indépendantes, posons

$$G_{ijkl} \equiv R_{ijkl} - (\omega_{ik}\omega_{jl} - \omega_{il}\omega_{jk}), \quad (9)$$

$$C_{ijk} \equiv \omega_{ij,k} - \omega_{ik,j}. \quad (10)$$

Par dérivation covariante, on déduit le tenseur dérivé de Gauss

$$G_{mijkl} = G_{ijkl,m} + G_{ijlm,k} + G_{ijmk,l}; \quad (11)$$

qui est équivalent à

$$\omega_{il} C_{jkm} + \omega_{jk} C_{ilm} + \omega_{ik} C_{jml} + \omega_{jl} C_{imk} + \omega_{im} C_{jlk} + \omega_{jm} C_{ikl} = G_{mijkl}, \quad (12)$$

par suite de (9) et (10) et des identités de Bianchi pour R_{ijkl}. Les équations (12) peuvent être considérées comme un système de $\frac{N^2(N^2-1)(N-2)}{24}$, équations linéaires pour les $\frac{N(N^2-1)}{3}$ inconnues C_{ijk}. Comme les ω_{ik} et g_{ik} satisfont aux équations de Gauss, le système (12) est consistant et l'on a

$$\frac{N(N^2-1)}{3} \quad r > 1,$$

en désignant par r le rang de sa matrice. Dans les solutions non arbitraires des équations du champ r doit avoir sa valeur maxima, afin d'éviter toute ambiguïté dans la détermination des équations réellement indépendantes avant leur intégration. Supposons d'abord qu'un V_N est de classe $c > 1$. D'après la théorie des équations linéaires, tous les C_{ijk} sont alors déterminés sans ambiguïté par les (12) quand $\frac{N(N-2)}{8} \geq 1$ ou $N \geq 4$; par contre, quand $N < 4$, les (12) ne déterminent, sans ambiguïté, que $\frac{N^2(N^2-1)(N-2)}{24}$ des C_{ijk}, les autres étant arbitraires. Dans les deux cas, il est clair que toutes les équations de Codazzi

$$C_{ijk} = -\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha} X^{\beta}_{,i} X^{\gamma}_{,j} X^{\delta}_{,k}$$

sont indépendantes des équations de Gauss. Supposons maintenant que $c = 1$. Le système (12) est maintenant homogène et comme r est maximum, la seule solution est $C_{ijk} = 0$ quand $N \geq 4$; par contre, si $N < 4$, (12) donne $C_{ijk} = 0$ seulement pour $\frac{N^2(N^2-1)(N-2)}{24}$ de ces quantités. En conséquence, le nombre d'équations de Codazzi indépen-

([1]) Les $2N$ équations qui expriment les propriétés de conservation de T_{ik} et U_{ik} [*cf.* § 4, équations (13 *a*, *b*)] sont une simple conséquence des équations (5) et (6) et pour cette raison ne constituent pas des équations du champ indépendantes devant être ajoutées au système (5), (6), (7) et (8).

dantes des équations de Gauss sera donc le suivant :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{zéro,} & \text{quand } N \geqq 4 \\ \frac{1}{3}N^2(N^2-1) & \\ -\frac{1}{24}N^2(N^2-1)(N-2), & \text{quand } N < 4 \end{array}\right\} \text{pour } c = 1.$$

Pour une solution non arbitraire, le nombre d'équations indépendantes doit être égal à celui des inconnues indépendantes. On obtient donc :

pour $c > 1$:

$$\underbrace{\frac{1}{12}N^2(N^2-1)}_{\text{Gauss}} + \underbrace{\frac{1}{3}N(N^2-1)}_{\text{Codazzi}} + \underbrace{N(N+1)}_{\text{équat. (5) et (6)}} = \underbrace{2N(N+1)}_{\text{inconnues}}; \quad (\alpha)$$

pour $c = 1$ et $N < 4$:

$$\underbrace{\frac{1}{12}N^2(N^2-1)}_{\text{Gauss}}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{3}N(N^2-1) - \frac{1}{24}N^2(N^2-1)(N-2)}_{\text{Codazzi}}$$

$$+\underbrace{N(N+1)}_{\text{équat. (5) et (6)}} = \underbrace{2N(N+1)}_{\text{inconnues}}; \quad (\beta)$$

pour $c = 1$ et $N \geqq 4$:

$$\underbrace{\frac{1}{12}N^2(N^2-1)}_{\text{Gauss}} + \underbrace{N(N+1)}_{\text{équat. (5) et (6)}} = \underbrace{2N(N+1)}_{\text{inconnues}}. \quad (\gamma)$$

Il n'y a pas de valeur entière positive de N satisfaisant à (α) ou à (β) et (γ) donne la seule solution $N = 4$. Le théorème est donc démontré.

Un autre théorème important peut être déduit simplement de l'analyse des équations du champ indépendamment de leur intégration. Ce théorème s'énonce comme suit :

La métrique du contenant quadridimensionnel V_4 d'un Univers complètement autonome et autodéterminé est hyperbolique normale; en d'autres termes, il y a trois dimensions spatiales réelles et une dimension imaginaire (temporelle).

Une solution des équations du champ ne peut être considérée comme une solution non arbitraire admissible que si elle détermine sans ambiguïté les constantes λ_g et λ_ω des équations (5) et (6). Tel est le cas d'une hypersphère quadrimensionnelle S_4 vide, c'est-à-dire pour laquelle $T_{ik} = U_{ik} = 0$. Dans toute autre solution non arbitraire les valeurs aux limites de g_{ik} et ω_{ik} doivent être égales aux propriétés correspondantes de S_4 sur une hypersurface tridimensionnelle σ_3 (de S_4). En d'autres termes, et par suite de (1 *b*) et (2), les solutions non arbitraires doivent avoir un contact, au moins du second ordre, avec S_4 le long de l'hypersurface frontière σ_3. Dans un contact du second ordre, les dérivées normales $\frac{\partial g_{ik}}{\partial n}$ ont la même valeur des deux côtés de σ_3 par suite de (1 *a*). Mais la théorie générale des équations aux dérivées partielles du second ordre, appliquée à (5), nous apprend que g_{ik} et $\frac{\partial g_{ik}}{\partial n}$, considérés comme valeurs aux limites, sont surabondants et non indépendants, sauf si la métrique de V_4 est hyperbolique normale.

La solution absolument non arbitraire des équations du champ est celle qui résulte de l'analyse suivante :

1° les g_{ik} et ω_{ik} sont tout d'abord déterminés par (5) et (6) en fonction des T_{ik} et des U_{ik}, λ_g, λ_ω et x_i, ainsi que des valeurs aux limites. On obtient ainsi les fonctions

$$g_{ik}[x^l;\, T_{jl};\, \lambda_g;\, (g)_\sigma] \quad \text{et} \quad \omega_{ik}[x^l;\, U_{jl};\, \lambda_\omega;\, (\omega)_\sigma],$$

où (g_σ) symbolise l'ensemble des valeurs aux limites $(g_{ik})_\sigma$ et $\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial n}\right)_\sigma$ et $(\omega)_\sigma$ l'ensemble des valeurs aux limites $(\omega_{ik})_\sigma$ et $\left(\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial n}\right)_\sigma$;

2° ces fonctions sont ensuite introduites dans les 20 équations de Gauss (dont les équations de Codazzi sont ici une conséquence), qui déterminent alors les T_{ik} et U_{ik} en fonction des x^i, de λ_g et λ_ω et des valeurs aux limites, c'est-à-dire

$$T_{ik}[x^l;\, \lambda_g,\, \lambda_\omega;\, (g)_\sigma,\, (\omega)_\sigma], \quad U_{ik}[x^l;\, \lambda_g,\, \lambda_\omega;\, (g)_\sigma,\, (\omega)_\sigma];$$

3° finalement, les équations $\lambda_g = -\frac{R+T}{2}$ et $\lambda_\omega = -\frac{S+U}{2}$, conséquences de (5) et (6), déterminent l'hypersurface frontière σ_3 pour laquelle λ_g et λ_ω sont effectivement des constantes absolues et donnent en même temps les valeurs qu'il faut assigner à ces constantes. On peut montrer qu'une telle solution absolument non arbitraire existe et est unique.

Nous ne nous occuperons cependant pas ici de cette question, car les résultats précédents sont suffisants pour montrer que le contenant d'un Univers complètement autonome et autodéterminé a les mêmes propriétés fondamentales que notre espace-temps. En d'autres termes, l'existence de l'espace-temps quadridimensionnel de l'Univers réel n'est pas, comme d'habitude, un postulat initial de la théorie, étant au contraire une conséquence de son principe de base, selon lequel l'Univers peut être considéré comme un être mathématique complètement autonome et autodéterminé.

II. — Équations du mouvement.

4. Les fluides élémentaires. — Des propriétés générales des premiers membres des équations (5) et (6) on déduit les propriétés suivantes des seconds membres T_{ik} et U_{ik} :

1° les traces de T_{ik} et U_{ik} ne sont pas identiquement nulles;

2° ces tenseurs sont conservatifs, c'est-à-dire satisfont aux équations

$$(T^{ij}_{,j})_g \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{\omega}\, T^{ij}) + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_g T^{jk} = 0, \quad (13a)$$

avec $T^{ij} = g^{il} g^{jk} T_{lk}$ et

$$(U^{ij}_{,j})_\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{\omega}\, U^{ij}) + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_\omega U^{jk} = 0, \quad (13b)$$

avec $U^{ij} = \omega^{il}\omega^{jk} U_{lk}$, $\omega = |\omega_{ik}|$ et

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_\omega \equiv \frac{1}{2}\omega^{ih}\left(\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial \omega_{hk}}{\partial x^j}\right). \quad (14)$$

Ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour pouvoir interpréter T_{ik} et U_{ik} comme des tenseurs de densité d'énergie-impulsion de deux fluides élémentaires que nous appellerons le fluide T et le fluide U. Aux tenseurs de densité d'énergie-impulsion correspondent évidemment des vecteurs courants qui doivent être aussi conservatifs (nous verrons d'ailleurs plus loin que les vecteurs courants sont égaux à des vecteurs essentiellement conservatifs). Soient L_T et L_U les lignes d'Univers des particules infinitésimales des fluides T et U; désignons par $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$ le vecteur unitaire tangent à L_T ou L_U dont les composantes satisfont à la condition

$$g_{ik}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = 1,$$

$\mathrm{d}s$ étant ici une longueur infinitésimale le long de L_T ou de L_U. Soient enfin π_g et π_ω des scalaires. Le vecteur courant peut évidemment s'écrire $\pi_g \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$ pour le fluide T et $\pi_\omega \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$ pour le fluide U. Ils satisfont aux équations de conservation

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,\pi_g \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right) = 0, \quad (15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\omega}\,\pi_\omega \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right) = 0. \quad (15b)$$

Les tenseurs d'énergie-impulsion des fluides T et U peuvent être décomposés, comme le tenseur d'énergie-impulsion de tout fluide, en deux parties : une partie purement cinétique et une partie non cinétique. En conséquence, on peut écrire

$$T^{ij} = \pi_g \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} + \Theta^{ij}_g, \quad (16a)$$

$$U^{ij} = \pi_\omega \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} + \Theta^{ij}_\omega, \quad (16b)$$

où Θ^{ij}_g et Θ^{ij}_ω désignent les parties non cinétiques. En prenant les traces de (16), on obtient

$$\pi_g = \mathrm{tr}_g\,(T^{ij} - \Theta^{ij}_g), \quad (17a)$$

$$\pi_\omega = \mathrm{tr}_g\,(U^{ij} - \Theta^{ij}_\omega). \quad (17b)$$

Les équations d'état pour les fluides élémentaires peuvent être déduites de ces relations.

5. Équations du mouvement pour les fluides élémentaires. — Ces équations sont les équations différentielles des lignes d'Univers des particules infinitésimales des fluides T et U. On peut les déduire en introduisant les expressions hydrodynamiques (16) des tenseurs de densité d'énergie-impulsion dans les équations de conservation (13), tout en tenant compte de la conservation (15) des vecteurs courants. On obtient ainsi les équations du mouvement

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_g \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\pi_g}(\Theta^{ij}_{g,j})_g, \quad (18a)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_\omega \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\pi_\omega}(\Theta^{ij}_{\omega,j})_\omega. \quad (18b)$$

Pour abréger considérablement l'exposé, nous introduirons un symbole a, signifiant soit g (dans le cas du fluide T), soit ω (dans le cas du fluide U). Les équations (18) s'écriront alors simplement

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_a \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\pi_a}(\Theta^{ij}_{a,j})_a. \quad (19)$$

Supposons, par exemple, que les fluides élémentaires peuvent être considérés comme parfaits (sans frottement) dans un certain domaine d'espace-temps. Les tenseurs non cinétiques ont alors la forme simple

$$\Theta^{ij}_a = \frac{8\pi K_a}{c^4} p_a g^{ij} \quad \text{et} \quad \pi_a = -\frac{8\pi K_a}{c^2}\left(\mu_a + \frac{p_a}{c^2}\right), \quad (20)$$

p_a étant la pression dans les fluides T ou U, μ_a les densités propres correspondantes, K_g la constante newtonienne de la gravitation et K_ω une autre constante qui sera déterminée plus loin. Les relations (17) s'écriront donc maintenant

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tr}_g(T^{ij}) &= -\frac{8\pi K_g}{c^2}\left(\mu_g - \frac{3p_g}{c^2}\right), \\ \mathrm{tr}_g(U^{ij}) &= -\frac{8\pi K_\omega}{c^2}\left(\mu_\omega - \frac{3p_\omega}{c^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

et les équations du mouvement (19) prennent ici

la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}_a \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\mu_a c^2 + p_a} \left[\left(\frac{\partial p_a}{\partial x_i} \right)_g + p_a (g^{ij}_{,j})_a \right], \tag{22}$$

avec

$$\left(\frac{\partial p_a}{\partial x_i} \right)_g = g^{ij} \frac{\partial p_a}{\partial x^j}.$$

Les équations précédentes (19) ou (22) sont des équations densitaires du mouvement (pour des particules infinitésimales). Pour déduire les équations du mouvement correspondantes pour des particules finies des fluides T et U, considérons les intersections des tubes d'Univers de ces particules avec les hypersurfaces tridimensionnelles spatiales d'une famille continue dépendant du paramètre temporel x^4. En posant $\delta\mathfrak{m}_a = \pi_a \, \mathrm{d}\tau_a$ (avec $\mathrm{d}\tau_a = \sqrt{a}\, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 \, \mathrm{d}x^3$), on peut définir par

$$V^i = \frac{1}{\mathfrak{m}_a} \int_{\tau_a} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \delta\mathfrak{m}_a \qquad \left(\mathfrak{m}_a = \int_{\tau_a} \delta\mathfrak{m}_a \right), \tag{23}$$

un vecteur pour chaque τ_a. En posant de plus

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = V^i + v^i, \tag{24}$$

on voit que v^i satisfait à la condition

$$\int_{\tau_a} v^i \, \delta\mathfrak{m}_a = 0; \tag{25}$$

Dans le voisinage de toute particule, les champs métriques peuvent être décomposés en deux parties : l'une (a^0_{ik}) représente le champ non « troublé » (c'est-à-dire abstraction faite de l'influence de la particule examinée); l'autre (a'_{ik}) représente le champ métrique propre de la particule. Posons $a^{ik} \equiv \frac{\delta^{ik}}{\chi_a} + \alpha^{ik}_a$ (avec $\chi_g \equiv 1$). Les symboles de Christoffel peuvent alors se mettre sous la forme

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}_a \equiv \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_a + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}'_a, \tag{26}$$

avec

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_a \equiv \frac{1}{2} \frac{\delta^{ih}}{\chi_a} \left(\frac{\partial a^0_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial a^0_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial a^0_{hk}}{\partial x^j} \right) \tag{27}$$

et

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}'_a = & \frac{1}{2} \frac{\delta^{ih}}{\chi_a} \left(\frac{\partial a'_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial a'_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial a'_{hk}}{\partial x^j} \right) \\ & + \frac{1}{2} \alpha^{ih}_a \left(\frac{\partial a'_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial a'_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial a'_{hk}}{\partial x^j} \right) \\ & + \frac{1}{2} \alpha^{ih}_a \left(\frac{\partial a^0_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial a^0_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial a^0_{hk}}{\partial x^j} \right). \end{aligned} \tag{28}$$

Finalement, le théorème généralisé sur la divergence-flux donne

$$\int_{\tau_a} (\Theta^{ij}_{a,j})_a \, \mathrm{d}\tau_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^4} \int_{\tau_a} \Theta^{i4}_a \, \mathrm{d}\tau_a + \int_\sigma \Theta^{il}_a (n_a)_l \, \mathrm{d}\sigma_a,$$

où σ_a désigne la frontière de τ_a et $(n_a)_l$ les composantes de la normale unitaire à $\sigma_a (a_{ik} n^i_a n^k_a = 1)$. En soumettant les équations (19) à l'opération $\int_{\tau_a} \delta\mathfrak{m}_a$ les résultats précédents donnent les équations suivantes du mouvement pour les particules finies

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_a \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s} & + V^j V^k \int_{\mathfrak{m}_a} \left(\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_a + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}'_a \right) \delta\mathfrak{m}_a \\ & + \int_{\mathfrak{m}_a} \left(\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_a + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}'_a \right) v^j v^k \, \delta\mathfrak{m}_a \\ & + 2 V^k \int_{\mathfrak{m}_a} \left(\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_a + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}'_a \right) v^j \, \delta\mathfrak{m}_a \\ & = - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^4} \int_{\tau_a} \Theta^{4i}_a \, \mathrm{d}\tau_a - \int_{\sigma_a} \Theta^{il}_a (n_a)_l \, \mathrm{d}\sigma_a, \end{aligned} \tag{29}$$

où l'on a

$$\mathfrak{m}_a \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_{\tau_a} V^i \, \delta\mathfrak{m}_a = \int_{\tau_a} \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} \delta\mathfrak{m}_a;$$

par suite des équations de continuité (15), équivalentes à $\frac{\mathrm{d}(\delta\mathfrak{m}_a)}{\mathrm{d}s} = 0$. Pour aller plus loin, il faut déterminer v^i et les symboles de Christoffel pour les champs propres. En d'autres termes, il faut connaître la structure des particules. Les équations (29) sont valables quelles que soient les dimensions et la forme des particules, mais étant donné que les plus importantes applications de ces équations sont les applications microphysiques aux particules fondamentales, nous admettrons dorénavant que les particules sont petites et peuvent être considérées (avant quantification) comme des sphérules en rotation. En tout point d'une particule on peut alors écrire

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_a = \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_{a0} + \left[\frac{\partial}{\partial x^m} \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_a \right]_0 x^m,$$

$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_{a0}$ désignant la valeur de $\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}^0_a$ au centre de la particule et x^m des coordonnées locales orthogonales avec $x^m = 0$ au centre. Les vitesses propres sont données par

$$v^j = \frac{\Omega}{c\sqrt{-1}} (u^k x^l - u^l x^k), \tag{30}$$

où j, k, l est une permutation circulaire de 1, 2, 3, Ω la vitesse angulaire de rotation de la particule T (ou U) et u^k le vecteur unitaire de l'axe de rotation. Pour toute quantité Q nous poserons

$$\overline{Q_a} \equiv \int_{\mathfrak{m}_a} Q \, \delta\mathfrak{m}_a, \qquad \widetilde{Q_a} \equiv \int_{\tau_a} Q \, \mathrm{d}\tau_a.$$

Soit $\vec{a}^0_i$ le vecteur d'espace de composantes (a^0_{i1}, a^0_{i2}, a^0_{i3}) et posons

$$\vec{M}_a = \vec{u}\, \overline{(\Omega \rho^2)_a}, \qquad \vec{\mathfrak{M}}_a = \vec{u}\, \overline{(\Omega \rho^2 v^4)_a} \qquad (\rho^2 = \Sigma x^2_m). \tag{31}$$

Par suite de la symétrie sphérique de π_a et de la symétrie rotationnelle de v^4 dans les particules, les

équations (29) donnent alors

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{m}_a \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s} &+ \left(\mathfrak{m}_a \left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{a0} + \overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}'_a} \right) V^j V^k \\
&+ \overline{\left(\left\{ {i \atop jk} \right\}^0_a v^j v^k \right)_a} + \overline{\left(\left\{ {i \atop jk} \right\}'_a v^j v^k \right)_a} \\
&+ 2 V^k \overline{\left(\left\{ {i \atop jk} \right\}'_a v^j \right)_a} \\
&- \frac{1}{4 c \chi_a \sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\overrightarrow{\mathfrak{M}}_a . \operatorname{rot} \vec{a}^0_4 \right) \\
&+ \frac{1}{4 c \chi_a \sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x^4} \left(\overrightarrow{\mathfrak{M}}_a . \operatorname{rot} \vec{a}^0_i \right) \\
&- \frac{V^k}{2 c \chi_a \sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\vec{M}_a . \operatorname{rot} \vec{a}^0_k \right) \\
&+ \frac{V^k}{2 c \chi_a \sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\vec{M}_a . \operatorname{rot} \vec{a}^0_i \right) \\
&= - \frac{\mathrm{d}\widetilde{\Theta}^{4i}_a}{\mathrm{d}x^4} - \int_{\sigma_a} \Theta^{il}_a (n_a)_l \, \mathrm{d}\sigma_a. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Les propriétés et définitions (24) et (25) montrent que v^4 tend vers zéro avec le spin des particules. Ceci étant dit, nous allons simplifier les équations (32) en supposant que le spin des particules est petit (tel est le cas des particules fondamentales dont le spin est de l'ordre de h). Les termes des équations du mouvement qui dépendent du carré du spin sont alors négligeables par rapport aux autres termes et (32) devient

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{m}_a \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s} &+ \left(\mathfrak{m}_a \left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{a0} + \left\{ {i \atop jk} \right\}'_a \right) V^j V^k \\
&- \frac{V^k}{2 c \chi_a \sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\vec{M}_a . \operatorname{rot} \vec{a}^0_k \right) \\
&+ \frac{1}{2 c \chi_a \sqrt{-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\vec{M}_a . \operatorname{rot} \vec{a}^0_i \right) \\
&= - \frac{\mathrm{d}\widetilde{\Theta}^{4i}_a}{\mathrm{d}x^4} - \int_{\sigma_a} \Theta^{il}_a (n_a)_l \, \mathrm{d}\sigma_a. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Considérons, par exemple, une particule T (ou U) sans spin et supposons que dans le domaine de la particule le fluide T (ou U) a une structure corpusculaire : Θ^{ik}_a est alors nul sur la frontière σ_a de la particule (corpuscule). De plus, si la particule a une structure invariable, $\widetilde{\Theta}^{4i}_a$ reste constant pour toute valeur de x^4 et les équations (33) se réduisent alors à

$$
\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s} + \left(\left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{a0} + \frac{1}{\mathfrak{m}_a} \left\{ {i \atop jk} \right\}'_a \right) V^j V^k = 0. \qquad (34)
$$

On voit donc que dans les conditions envisagées la ligne d'Univers d'une particule corpusculaire du fluide T est une géodésique de la métrique interne g^0_{ik}, tandis que la ligne d'Univers d'une particule corpusculaire du fluide U est une géodésique de la métrique externe ω^0_{ik}, quand on peut négliger les réactions du rayonnement (termes dépendant des champs métriques propres g'_{ik}, ω'_{ik}).

6. **Signification physique des champs métriques.** — Pour interpréter physiquement les résultats précédents sur les fluides T et U, il faut connaître la signification physique des champs métriques. Comme il est bien connu que g_{ik} est le tenseur des potentiels du champ de gravitation, il suffit de déterminer la signification physique du tenseur métrique externe ω_{ik} de l'espace-temps. Considérons, dans le champ ω^0_{ik}, un corpuscule d'épreuve du fluide U, sans spin et doué d'une structure invariable $\left(\frac{d\widetilde{\Theta}^{i4}_\omega}{dx^4} = 0 \right)$. De (34), on déduit alors son équation du mouvement

$$
\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s} + \left(\left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{\omega 0} + \frac{1}{\mathfrak{m}_\omega} \overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}'_\omega} \right) V^j V^k = 0. \qquad (35)
$$

Considérons d'autre part les équations classiques de Laplace-Lorentz (supposées provisoirement rigoureuses) pour le mouvement d'un corpuscule (de charge électrique e et de masse propre m_0) sans spin sous l'action d'un champ purement électromagnétique F^i_j :

$$
\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s} + \frac{e}{m_0 c^2} F^i_j V^j - r^i_\omega = 0, \qquad (36)
$$

où r^i_ω désigne la réaction de rayonnement qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter ici. L'équation (36) est équivalente à (35) si la condition suivante est satisfaite :

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left[\frac{e}{m_0 c^2} F^i_j - (2 - \delta^4_j) \left\{ {i \atop j4} \right\}^0_{\omega 0} V^4 \right] V^j \\
&\quad = \left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{\omega 0} V^j V^k + \left(r^i_\omega + \frac{1}{\mathfrak{m}_\omega} \overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}'_\omega} V^j V^k \right) \\
&\qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}
\right\} \qquad (37)
$$

En faisant tendre vers zéro la vitesse $V^j \to 0$ $(j = 1, 2, 3)$ du corpuscule, le second membre de (37) se comporte comme un infiniment petit du second ordre, tandis que $V^4 \to 1$. On doit donc nécessairement avoir

$$
F^i_j = \frac{m_0 c^2}{e} (2 - \delta^4_j) \left\{ {i \atop j4} \right\}^0_{\omega 0}. \qquad (38)
$$

Or, d'après notre théorie des particules fondamentales [3], l'électron $\left(\text{y compris ses états microélectroniques qui ont tous le même } \frac{e}{m_0} \text{ que l'état normal} \right)$ est la seule particule pour laquelle $\frac{d\widetilde{\Theta}^{4i}_g}{dx^4} = 0$ en l'absence de champ électromagnétique et $\frac{d\widetilde{\Theta}^{4i}_\omega}{dx^4} = 0$ en l'absence de champ gravifique. Les équations (35) ne peuvent donc être comparées à (36) que si ces dernières équations sont appliquées à un électron, de sorte que dans (36), e et m_0 sont la charge et la masse propre $(m_0)_e$ de l'électron.

Comme on a $\omega_{ik} = \chi_0 g^0_{ik} + \varpi_{ik}$, les ϖ_{ik} étant des petites quantités et χ_0 la courbure moyenne (constante) de l'hypersphère de De Sitter la plus proche du domaine d'espace-temps considéré, la relation (38) donne plus simplement

$$F_{ik} \equiv g^0_{il} F^l_k \simeq \frac{1}{\chi_0} \omega^0_{il} F^l_k \doteq \frac{(m_0)_e c^2}{\chi_0 e} (2 - \delta^4_k) [i, 4k]^0_\omega, \quad (39)$$

$[i, 4k]^0_\omega$ désignant le symbole de Christoffel de première espèce formé avec les ω^0_{ik}. Posons

$$\left. \begin{array}{l} A_4 = \dfrac{(m_0)_e c^2}{e \chi_0} \dfrac{\omega^0_{44}}{2}, \qquad A_j = \dfrac{(m_0)_e c^2}{e \chi_0} \omega^0_{4j} \\ \qquad (j = 1, 2, 3). \end{array} \right\} \quad (40)$$

Les équations (39) s'écrivent alors comme suit :

$$F_{ik} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \right) + \frac{(m_0)_e c^2}{e \chi_0} \frac{(2 - \delta^4_j)}{2} \frac{\partial \omega^0_{ik}}{\partial x^4}. \quad (41)$$

Remarquons maintenant qu'il est impossible de comparer les équations de Laplace-Lorentz pour le mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique pur aux équations

$$\frac{\mathrm{d} V^i}{\mathrm{d} s} + \left(\left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{g0} + \frac{1}{\mathfrak{m}_g} \overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}'_g \right) V^j V^k = 0, \quad (42)$$

qui résultent de l'application des équations (34) à un corpuscule du fluide T sans spin et à structure invariable $\left(\frac{d\tilde{\Theta}^{4i}_g}{dx^4} = 0 \right)$; en effet, il est bien connu que les équations (42), abstraction faite de la réaction du rayonnement, sont les équations relativistes du mouvement d'une particule matérielle dans un champ gravifique pur. Le champ électromagnétique est donc effectivement relié au tenseur métrique externe ω_{ik} par les équations (38) ou (40), et l'on arrive à la conclusion importante que ω_{ik} est le tenseur des potentiels généralisés du champ électromagnétique, de même que g_{ik} est le tenseur des potentiels généralisés du champ gravifique. Il est aussi évident que le fluide que nous avons appelé jusqu'à présent « fluide U » est le fluide électrique élémentaire, tandis que le fluide T est le fluide élémentaire de matière. De plus, les équations (6) du champ métrique externe sont des équations électromagnétiques pour les potentiels généralisés ω_{ik}. Ces équations généralisent donc les équations lorentziennes $\square A_i = j_i$ pour le potentiel électromagnétique classique d'une manière analogue à la généralisation, par les équations (5) pour les g_{ik}, de l'équation de Laplace-Poisson pour le potentiel newtonien.

Comme les deux membres de (38), où F^i_j est supposé représenter le tenseur électromagnétique classique, n'ont la même variance que pour des changements purement spatiaux des coordonnées et comme, d'autre part, F_{ik}, défini par (41), n'est un tenseur antisymétrique que pour un champ ω^0_{ik} statique, il est clair que la notion maxwellienne classique d'un champ électromagnétique pouvant être décrit par un tenseur antisymétrique du second ordre n'est qu'une approximation qui doit être généralisée en remplaçant F^i_j par une grandeur à trois indices F^i_{jk}. Celle-ci sera évidemment donnée par

$$F^i_{jk} = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{\omega 0}, \quad (43)$$

de sorte que les véritables équations lorentziennes du mouvement d'un corpuscule (de charge Q et de masse propre M_0) soumis à un champ électromagnétique pur seront les suivantes (en l'absence de spin)

$$\frac{\mathrm{d} V^i}{\mathrm{d} s} + \left(\frac{Q}{M_0 c^2} F^i_{jk} + \frac{1}{\mathfrak{m}_\omega} \overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}'_\omega \right) V^j V^k = 0. \quad (44)$$

Les équations lorentziennes habituelles ne sont donc qu'une approximation, valable lorsque la vitesse du corpuscule est petite par rapport à c. Dans ce cas, en effet, les termes en $V^j V^k (j, k \neq 4)$ sont du second ordre par rapport aux termes en $V^4 V^j$ et il ne reste donc qu'un champ à deux indices F^i_j dans l'équation du mouvement. Nous rencontrons donc en somme en Electromagnétisme, d'après notre théorie unitaire, les mêmes circonstances qu'en Relativité générale au sujet des forces de gravitation. Celles-ci dépendent, en réalité, des quantités à trois indices $\left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{g0}$ (formées avec les g^0_{ik} pour toutes les valeurs de $i, j, k = 1, 2, 3, 4$), au lieu de ne dépendre que de quantités à deux indices.

Nous avons dit plus haut que l'électron est la seule particule pour laquelle $\frac{d\tilde{\Theta}^{4i}_\omega}{dx^4} = 0$ dans un champ électromagnétique pur. Considérons alors une particule non élémentaire (dont le M_0 et la charge Q sont quelconques) sous l'action de forces purement électromagnétiques. Quand le spin peut être négligé (conditions lorentziennes), l'équation du mouvement d'une telle particule est la suivante [d'après (33)] :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d} V^i}{\mathrm{d} s} &+ \left(\left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{\omega 0} + \frac{1}{\mathfrak{m}_\omega} \overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}'_\omega \right) V^j V^k \\ &= -\frac{1}{\mathfrak{m}_\omega} \left(\frac{\mathrm{d} \widetilde{\Theta}^{4i}_\omega}{\mathrm{d} x^4} \right)_{\text{n.e.}}, \end{aligned} \quad (45)$$

où $\left(\frac{d\tilde{\Theta}^{4i}_\omega}{dx^4} \right)_{\text{n.e.}}$ désigne la variation temporelle de Θ^{4i}_ω due simplement au fait que la particule n'est pas élémentaire. En comparant (45) avec (44), tout en tenant compte de (43), on obtient donc

$$\frac{1}{\mathfrak{m}_\omega} \left(\frac{\mathrm{d} \widetilde{\Theta}^{4i}_\omega}{\mathrm{d} x^4} \right)_{\text{n.e.}} = \left[\frac{Q (m_0)_e}{e M_0} - 1 \right] \left\{ {i \atop jk} \right\}^0_{\omega 0} V^j V^k, \quad (46)$$

résultat qui sera appliqué plus loin.

7. **Équations du mouvement pour les particules ($T + U$) mixtes et concentriques.** — Le système fondamental des équations du champ (5),

(6), (7) et (8) montre que les particules T (particules matérielles) et leurs équations du mouvement sont, en principe, indépendantes des particules U (particules d'électricité) et des équations du mouvement correspondantes. D'après notre théorie unitaire, la matière et l'électricité doivent être considérées comme les contenus essentiels et indépendants de l'espace-temps. On peut montrer néanmoins [2] que le centre d'une particule T quelconque se trouve toujours dans le voisinage immédiat du centre de la particule U correspondante. La coïncidence générale et rigoureuse des particules T et U est une condition importante qui correspond aux idées classiques sur la matière électrisée (matière porteuse de charge) et qui se trouve implicitement à la base des équations lorentziennes du mouvement d'un corpuscule électrisé. On doit cependant remarquer que l'explication de phénomènes importants, tels que le comportement du moment magnétique des états microélectroniques, exige probablement que l'on admette l'existence d'un petit écart entre les positions des centres des pairs de particules T et U [3].

Il est important de déduire des équations générales du mouvement pour des particules T et U indépendantes les équations du mouvement pour des particules $(T+U)$ mixtes et concentriques. On peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s}\right)_g + \left(\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s}\right)_\omega,$$

les indices g et ω désignant ici les accélérations produites respectivement par les forces gravifiques et électromagnétiques. Appliquons successivement les équations (33) à $\left(\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s}\right)_g$ et à $\left(\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s}\right)_\omega$. En comparant ensuite les équations (33) pour les particules T aux équations relativistes du mouvement d'un corpuscule de matière de masse propre arbitraire (sans spin) sous l'action de forces gravifiques pures, on déduit immédiatement que $\frac{\mathrm{d}\widetilde{\Theta}_g^{4i}}{\mathrm{d}x^4} = 0$ pour toutes les particules. En tenant compte par ailleurs du résultat (46), on obtient finalement les équations du mouvement pour les particules $(T+U)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}s} + \left[\left\{ {i \atop jk} \right\}_{g0}^{0} + \frac{Q(m_0)_e}{M_0 e}\left\{ {i \atop jk} \right\}_{\omega 0}^{0} + \frac{1}{\mathfrak{m}_a}\overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}_g' + \frac{1}{\mathfrak{m}_\omega}\overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}_\omega'\right] V^j V^k \\
&\quad - \frac{1}{2c\sqrt{-1}} V^k \left[\frac{1}{\mathfrak{m}_\omega \chi_\omega}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\vec{M}_\omega \cdot \mathrm{rot}\,\vec{\omega}_k^0\right) + \frac{1}{\mathfrak{m}_g}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\vec{M}_g \cdot \mathrm{rot}\,\vec{g}_k^0\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2c\sqrt{-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{\mathfrak{m}_\omega \chi_\omega}\left(\vec{M}_\omega \cdot \mathrm{rot}\,\vec{\omega}_i^0\right) + \frac{1}{\mathfrak{m}_g}\left(\vec{M}_g \cdot \mathrm{rot}\,\vec{g}_i^0\right)\right] \\
&= -\frac{1}{\mathfrak{m}_\omega}\int_{\sigma_\omega}\Theta_\omega^{il}(n_\omega)_l\,\mathrm{d}\sigma_\omega - \frac{1}{\mathfrak{m}_g}\int_{\sigma_g}\Theta_g^{il}(n_g)_l\,\mathrm{d}\sigma_g. \qquad (47)
\end{aligned}$$

Il est intéressant de remarquer que, tandis que l'on a $\frac{\mathrm{d}\widetilde{\Theta}_g^{4i}}{\mathrm{d}x^4} = 0$ pour toutes les particules T (élémentaires et non élémentaires), $\left(\frac{\mathrm{d}\widetilde{\Theta}_\omega^{4i}}{\mathrm{d}x^4}\right) \neq 0$ pour toutes les particules non élémentaires soumises à des forces électromagnétiques. Cette différence fondamentale du comportement des particules T et U peut être expliquée comme suit. D'après notre théorie, les particules non élémentaires fondamentales (protons, neutrons) sont formées par la fusion de particules élémentaires (électrons et microélectrons) [3] et le rapport $\frac{\mu_\omega}{\mu_g}$ des densités de charge et de masse propre est spatialement variable dans les corpuscules correspondants. En conséquence, les forces électromagnétiques, liées dans chaque élément de volume à $\frac{\mu_\omega}{\mu_g}$ suivant les idées classiques sur les particules $(T+U)$, peuvent évidemment produire une modification temporelle de la structure de la particule par l'intermédiaire d'une modification de la distribution de la pression s'accompagnant d'une variation correspondante de

$$\widetilde{\Theta}_\omega^{4i} \sim \frac{8\pi K_\omega}{c^2}\int_{\tau_\omega} g^{4i} p_\omega \,\mathrm{d}\tau_\omega.$$

Par contre, les forces gravifiques sont évidemment attachées uniformément aux éléments de masse des particules T, même dans les particules non élémentaires et aucune variation de $\widetilde{\Theta}_g^{4i}$ ne peut avoir lieu en l'absence de forces électromagnétiques.

8. **Les forces de spin.** — Ces forces, que nous désignerons ici par f_a^i, sont représentées dans les équations du mouvement (33) par les fonctions

$$f_a^i = -\frac{1}{2c\chi_a\sqrt{-1}} \times \left[V^k\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\vec{M}_a \cdot \mathrm{rot}\,\vec{a}_k^0\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\vec{M}_a \cdot \mathrm{rot}\,\vec{a}_i^0\right)\right]. \qquad (47)$$

Le vecteur $\vec{M}_a$, défini par (31) et le spin $\vec{\sigma}$ d'une particule sont reliés par

$$\vec{M}_a = -\frac{8\pi K_g}{c^2}\left(\frac{\delta\mathfrak{m}_a}{\delta\mathfrak{m}_g}\right)_0 \vec{\sigma}, \qquad (47')$$

où l'indice zéro indique qu'il faut prendre le rapport $\frac{\delta\mathfrak{m}_a}{\delta\mathfrak{m}_g}$ pour une certaine valeur ρ_0 de ρ. Le champ magnétique H peut être introduit dans les fonctions (47) en utilisant (40) et (41), ainsi qu'un résultat trouvé précédemment [4] qui s'exprime par

$$\frac{\partial\omega_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x^k} = \chi\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

où χ désigne l'invariant $\frac{1}{4}g^{ik}\omega_{ik}$ (courbure moyenne

de l'espace-temps). Ce résultat est une conséquence des équations de Codazzi (8) quand les composantes non diagonales du tenseur $A^i_k = \frac{1}{2} g^{il} \omega_{lk}$ sont des petites quantités par rapport aux composantes diagonales. On obtient donc, quand $V^l \ll 1$ ($l = 1, 2, 3$) :

$$\left.\begin{aligned} f^i_\omega &= \frac{4\pi K_g}{c^3 \chi_\omega} \left[\frac{e\chi_0}{(m_0)_e c^2} \frac{\partial}{\partial x^i} (\vec{\sigma}.\vec{H}) - \vec{\sigma}.\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{\omega}^0_i}{\partial x^4}\right)\right] \left(\frac{\delta \mathfrak{m}_\omega}{\delta \mathfrak{m}_g}\right)_0, \\ f^i_g &= \frac{4\pi K_g}{c^3} \left[\frac{e}{(m_0)_e c^2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\chi_0}{\chi} \vec{\sigma}.\vec{H}\right) - \vec{\sigma}.\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{g}^0_i}{\partial x^4}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Conformément à un autre résultat de [4] le moment magnétique $\vec{M}_{\mathrm{magn}}$ est relié par la formule suivante au spin de la particule sphérique

$$\vec{M}_{\mathrm{magn}} = 2 \frac{\chi}{\chi_0} \frac{(m_0)_e}{ec} K_g \gamma \vec{\sigma}, \quad (49)$$

où γ est un coefficient numérique ≤ 1 ; on doit d'ailleurs poser ici $\gamma = 1$, car nous admettons que μ_g a une symétrie sphérique dans les particules étudiées, En appliquant (49) à un électron $\left(|\sigma| = \frac{h}{4\pi}; |M_{\mathrm{magn}}| \simeq \frac{eh}{4\pi(m_0)_e c}\right)$, on trouve $\frac{\chi}{\chi_0} = \frac{e^2}{2(m_0)^2_e K_g}$. De plus, $\frac{\delta \mathfrak{m}_\omega}{\delta \mathfrak{m}_g}$ peut être considéré comme spatialement constant dans la particule électronique, ce qui donne évidemment $\frac{\delta \mathfrak{m}_\omega}{\delta \mathfrak{m}_g} = \frac{\mathfrak{m}_\omega}{\mathfrak{m}_g}$. Par suite de ces conditions et en tenant compte de $ds^2 \simeq -c^2 dt^2$, on voit que (48 *a*) se réduit, pour un champ statique et pour un électron, à l'expression classique

$$\vec{\varphi} = \mathrm{grad}(\vec{M}_{\mathrm{magn}}.\vec{H})$$

de la force $\varphi^i = \frac{c^4}{4\pi K_g} \frac{\mathfrak{m}_g}{\mathfrak{m}_\omega} f^i_\omega$ qui agit sur une particule de moment magnétique $\vec{M}_{\mathrm{magn}}$ par suite de la non-homogénéité du champ magnétique $\vec{H}$. Pour qu'il en soit de même pour toutes les particules, on doit donc avoir, conformément à (49),

$$\frac{e^2}{2(m_0)^2_e K_g} \left(\frac{\chi_0}{\chi}\right) \frac{\mathfrak{m}_g}{\mathfrak{m}_\omega} \left(\frac{\delta \mathfrak{m}_\omega}{\delta \mathfrak{m}_g}\right)_0 = 1, \quad (50)$$

ce qui permet d'écrire (48) sous la forme

$$f^i_\omega = \frac{4\pi K_g}{c^4} \left[\frac{\mathfrak{m}_\omega}{\mathfrak{m}_g} \frac{\partial}{\partial x^i} (\vec{H}.\vec{M}_{\mathrm{magn}}) - \frac{c}{\chi_\omega} \left(\frac{\delta \mathfrak{m}_\omega}{\delta \mathfrak{m}_g}\right)_0 \vec{\sigma}.\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{\omega}^0_i}{\partial x^4}\right)\right],$$

$$f^i_g = \frac{4\pi K_g}{c^4} \left[\frac{\mathfrak{m}_\omega}{\mathfrak{m}_g} \left(\frac{\chi_0}{\chi}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} (\vec{H}.\vec{M}_{\mathrm{magn}}) - c\vec{\sigma}.\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{g}^0_i}{\partial x^4}\right)\right].$$

Pour un électron $\frac{\chi_0}{\chi}$ est une très petite quantité ($4,8.10^{-43}$); la même fonction est aussi très petite pour les autres particules fondamentales, de sorte que f^i_g est une petite quantité par rapport à f^i_ω. On peut donc écrire l'équation (47) du mouvement des particules ($T + U$) en supprimant les termes en $\vec{M}_g$.

Manuscrit reçu le 20 juin 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CARTAN E. — *J. Math.*, 1922, **1**, 141-203.
[2] GIÃO A. — *Portugaliæ Physica*, 1946, **2**, 1-98; *Portugaliæ Mathematica*, 1946, **5**, 145-192; *Bul. Soc. Port. Mat.* (*A*), 1947, **1**, 29-42; *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 1212; 1948, **226**, 2051; 1949, **228**, 812; 1949, **229**, 981.
[3] GIÃO A. — *Portugaliæ Mathematica*, 1947, **6**, 67-114; *Ibid.*, 1948, **7**, 1-44; *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 454, 1275; 1948, **226**, 1177; *Gaz. de Mat.*, 1946, **30**, 4-5.
[4] GIÃO A. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 764-768; *J. Phys. Rad.*, 1949, **10**, 240-249; *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 1813; 1947; **225**, 924; 1948, **226**, 645, 1298 2126; 1949, **228**, 742, 1203.

OSCILLATIONS PENDULAIRES ET DE RELAXATION

Par M. R. FORTRAT.

Sommaire. — Discussion de la définition des oscillations de relaxation de van der Pôl. Cette définition ne s'applique pas à la plupart des oscillations décrites sous ce nom, qui s'opposent aux oscillations pendulaires par leur caractère d'irréversibilité. Les oscillations de relaxation s'établissent dans les systèmes qui évoluent entre deux régimes et passent alternativement de l'un à l'autre en décrivant un cycle dans un sens déterminé. S'il arrive que l'organe qui crée les deux régimes impose une amplitude déterminée aux oscillations de relaxation, cette constance ne peut pas être considérée comme une règle générale.

Les oscillations de relaxation ont été décrites par van der Pol en particulier dans un Mémoire célèbre paru dans l'*Onde électrique* en 1930 [1]. Il les associe, en même temps qu'il les oppose aux oscillations sinusoïdales, car il les définit l'une et l'autre comme deux cas extrêmes d'un même type général. Après avoir discuté les conclusions d'une étude purement quantitative, il décrit plusieurs exemples, mais sans bien indiquer comment ils se rattachent à l'équation qui sert de point de départ à son étude.

Les oscillations pendulaires libres, qui avaient été étudiées d'une manière approfondie par Pierre Curie, peuvent être représentées par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants de la forme

$$A\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+Cx=0. \qquad (1)$$

Les trois coefficients A, B et C sont positifs. En Mécanique, $-A\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ est une force d'inertie, $-B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est une force d'amortissement (frottement ou rayonnement) et $-Cx$ est une force de rappel vers une position d'équilibre stable $x=0$. Cette même équation se présente aussi en Électricité.

On sait que les oscillations décrites par l'équation (1) sont des équations pendulaires amorties pourvu que B ne soit pas trop grand par rapport à AC.

Pour entretenir les oscillations, il faut compenser l'amortissement par un apport périodique d'énergie. Parmi les procédés très variés que l'on emploie, l'un des plus intéressants consiste à se servir d'une lampe triode dont la grille est influencée par les oscillations à entretenir, l'énergie nécessaire leur étant apportée par le courant plaque. On peut entretenir ainsi non seulement des oscillations électriques, mais aussi des oscillations mécaniques telles que les oscillations d'un diapason ou d'une corde.

Quand la triode est montée en classe A, son rôle consiste à ajouter au premier membre de l'équation (1) un terme $-B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ qui compense le terme d'amortissement. On a pris l'habitude de dire que la triode ajoute une résistance négative $-B$ à la résistance positive $+B$ et par conséquent détruit l'amortissement.

Mais en fait les choses sont moins simples, car il est évidemment impossible de créer une réaction qui compense rigoureusement la résistance d'amortissement; on crée une réaction légèrement trop grande, de manière que l'amplitude des oscillations augmente, et c'est l'arrivée du point représentatif dans les régions où les caractéristiques sont courbes qui limite l'amplification et maintient l'amplitude constante à partir d'une certaine grandeur.

C'est donc la forme des caractéristiques bien plus que la grandeur de la réaction qui limite l'amplitude. Les caractéristiques jouent un rôle important dans le Mémoire de van der Pol auquel nous nous reportons au début de cet article. Cet auteur généralise l'étude de Pierre Curie en admettant que le terme d'amortissement est moins simple que dans l'équation (1), mais que B y est une fonction de x, négative quand x est petit, positive quand x est grand.

S'il en est ainsi, les amplitudes augmentent quand x est petit parce que $-\frac{B}{2A}$ est alors un incrément; elles diminuent au contraire quand x est grand, puisqu'alors $-\frac{B}{2A}$ devient un décrément. Que l'on parte d'oscillations initiales de faible ou de grande amplitude, un même régime s'établit au bout de quelque temps et persiste indéfiniment.

Pour faire une étude quantitative, on peut choisir un cas particulièrement simple et remplacer par

exemple (1) par

$$A\frac{d^2x}{dt^2} - B(1 - D'x^2)\frac{dx}{dt} + Cx = 0$$

ou

$$A\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d}{dt}(Bx - Dx^3) + Cx = 0. \qquad (2)$$

Le terme $Bx - Dx^3$ est introduit par l'organe qui entretient les oscillations et il se déduit de sa « caractéristique » de fonctionnement.

Par un changement convenable des variables, y compris le temps, on amène l'équation (2) à la forme

$$y'' - \varepsilon(1 - y^2)y' + y = 0. \qquad (3)$$

Van der Pol indique un procédé d'intégration graphique de cette équation, qui permet de construire avec assez de sûreté :

1° La courbe qui représente y' en fonction de y et que, pour plus de facilité, j'appellerai désormais l'« image » des oscillations. Cette courbe se rapproche rapidement d'une courbe fermée qui est le cycle limite (cycle de Poincaré [2]).

2° La courbe qui représente y en fonction du temps et que l'on déduit graphiquement de l'image déjà dessinée. Quand l'image est le cycle limite, y est une fonction périodique du temps.

Quand ε est petit, le cycle limite est très voisin d'un cercle décrit par le point représentatif avec une vitesse angulaire constante : le rayon de ce cercle est $\sqrt{2}$, qui annule bien en moyenne $1 - y^2$. Ce cycle limite se déforme de plus en plus à mesure que ε augmente, mais il définit toujours les oscillations d'une manière très stricte : pour chaque valeur de ε, il y a une période et une amplitude déterminées. D'autre part, alors que les oscillations sont encore presque sinusoïdales lorsque $\varepsilon = 0{,}1$, elles n'ont plus cette forme quand $\varepsilon = 1$ et s'en écartent de plus en plus au fur et à mesure que ε augmente.

En examinant l'aspect des courbes $y = f(t)$ quand ε est grand, van der Pol a été frappé de constater qu'elles reproduisaient des formes oscillatoires qui avaient échappé jusqu'alors à l'analyse, et il a cru pouvoir ramener toutes les oscillations au type représenté par l'équation

$$y'' + \varepsilon\psi(y)y' + y = 0, \quad \text{où} \quad \psi(0) = -1, \qquad (4)$$

ψ étant négatif quand y est petit, positif et croissant quand y est grand. Van der Pol se trouve ainsi amené à définir les oscillations de relaxation par l'équation (4) où ε est grand. Il les oppose aux oscillations sinusoïdales qui sont représentées par la même équation quand ε est petit.

Cette doctrine est très séduisante et elle est devenue presque classique; elle a fait par exemple l'objet d'un exposé intéressant par Le Corbellier [3].

Pourtant, lorsque l'on examine cette classification de plus près, on éprouve un sentiment de malaise bien traduit par cette phrase du livre de Barkhausen [4] : « Dans le fond, il n'y a pas de différence entre les deux genres d'oscillations. Mais les oscillations de relaxation se comportent quand même, pratiquement d'une manière toute différente ». Parmi les oscillations que tout le monde s'accorde à considérer comme de relaxation, certaines ont un aspect tellement caractéristique, que l'on doit pouvoir trouver un critère certain de classification, traduisant une différence de nature et non pas seulement l'ordre de grandeur d'un coefficient.

Nous allons examiner un certain nombre d'oscillations entretenues et nous serons amenés à les classer en deux catégories : pendulaires d'une part, de relaxation d'autre part, les oscillations pendulaires pouvant s'écarter notablement de la forme sinusoïdale, mais s'exécutant toujours de part et d'autre d'une position d'équilibre.

L'entretien exige un apport d'énergie; celle-ci provient d'une source qui débite l'énergie sous une tension continue où ne se trouve aucune cause de périodicité.

1. L'expérience de Janet. — Nous commencerons par ces oscillations assez compliquées, parce qu'elles illustrent bien la théorie de van der Pol : nous y voyons des oscillations pendulaires non sinusoïdales; la source d'énergie est le moteur qui entraîne la dynamo-série du montage que nous allons décrire.

Les oscillations s'établissent dans le rotor d'une magnéto ou d'une dynamo à excitation indépendante, dont l'induit est alimenté par une dynamo série maintenue en rotation uniforme par le moteur qui l'entraîne.

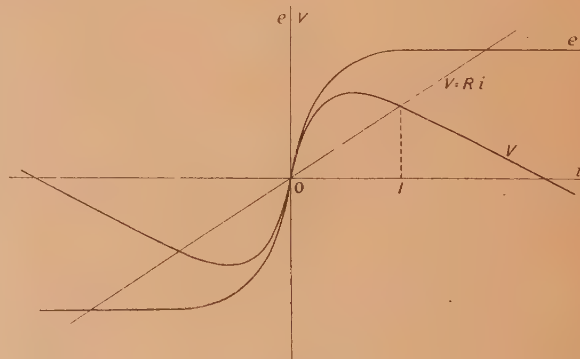


Fig. 1.

La caractéristique $e = f(i)$ d'une dynamo-série a l'allure de la courbe $\mathcal{B} = f(\mathcal{H})$ dans le fer, elle présente un palier de saturation. La différence de potentiel entre les bornes est $V = e - ri$. Si l'on ferme la machine sur un circuit de résistance R, le courant prend la valeur I mesurée par l'abscisse du point de rencontre de la caractéristique $V = F(i)$

avec la droite $V = Ri$. Signalons enfin que la caractéristique est symétrique par rapport à l'origine O.

Ceci étant rappelé, revenons à l'association de la dynamo-série avec la magnéto. Appelons R la résistance du rotor de la magnétio, L sa self, n le nombre de tours de son enroulement, Φ le flux magnétique total, ω la vitesse angulaire,

$$V = L\frac{di}{dt} + Ri - n\Phi\omega.$$

Le couple moteur $n\Phi i$ de la magnéto n'est équilibré que par le couple d'inertie, donc

$$n\Phi i + \mathcal{J}\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

et, en éliminant ω,

$$V = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{(n\Phi)^2}{\mathcal{J}}\int i\,dt$$

ou

$$L\frac{di}{dt} - (V - Ri) + \frac{(n\Phi)^2}{\mathcal{J}}\int i\,dt = 0.$$

Par analogie avec l'équation qui représente des oscillations électriques, nous écrirons $\frac{1}{C}$ au lieu de $\frac{(n\Phi)^2}{\mathcal{J}}$, q au lieu de $\int i\,dt$, v au lieu de V-Ri et l'équation devient

$$L\frac{di}{dt} - v + \frac{q}{C} = 0.$$

Comme $i = \frac{dq}{dt}$, on peut écrire

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} - v'_i\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0. \qquad (5)$$

La caractéristique v en fonction de i se déduit très facilement de la caractéristique V. Si l'on remarque que v ressemble à ai-bi^3, v' ressemble à $a - 3bi^2$ et (5) est du type (3) et en tout cas (4). L'expérience de Janet est bien une illustration de la théorie de van der Pol.

Il est facile de comprendre comment les oscillations se produisent. La magnéto étant immobilisée et mise en circuit, le courant s'établit à une valeur I. A ce moment on libère le rotor de la magnéto, qui est soumise au couple $n\Phi I$; il démarre et accélère sa rotation, créant une force électromotrice de plus en plus grande. Le courant diminue et s'annule; mais le rotor de la magnéto étant lancé, il continue à tourner, devenant générateur de courant négatif qu'il envoie dans la dynamo-série, qui, une fois amorcée, redevient génératrice, freine le rotor de la magnéto, la lance en sens contraire, etc. Le même processus se répète avec une amplitude qui croît de moins en moins vite et devient stationnaire.

Tout cela résulte de l'équation (5), dont nous allons effectuer l'intégration graphique par la méthode de Liénard [5].

Prenons comme variables

$$x = \sqrt{\frac{L}{C}}\,i \qquad \text{et} \qquad y = \frac{q}{C}.$$

Sur le graphique (*fig.* 2) le point M d'une courbe

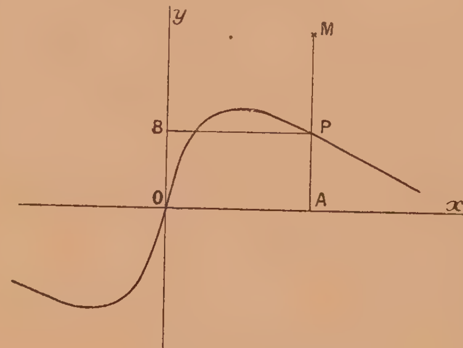


Fig. 2.

intégrale a pour coordonnées x et y :

$$AM = y = \frac{q}{C}, \qquad PM = PA + AM = -v + \frac{q}{C},$$

donc

$$PM = -L\frac{di}{dt},$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} - PM,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{i}{C} = \frac{1}{\sqrt{LC}}x = \frac{BP}{\sqrt{LC}},$$

donc, le long de la courbe intégrale,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{BP}{PM}.$$

Cette relation exprime que la courbe intégrale qui passe par le point M y est normale à la droite BM, autrement dit qu'elle est tangente à un arc de cercle centré sur B.

Pour construire une courbe intégrale, nous traçons une série de parallèles à Oy, nous déterminons les points B qui leur correspondent, puis, de chacun de ces points comme centre, nous traçons des arcs de cercle coupant les parallèles à Oy. Cela fait, la courbe intégrale se dessine bien. On voit sur la figure 3 comme elle évolue rapidement vers le cycle limite de Poincaré qui y a été dessiné.

Remarquons tout de suite que la caractéristique $v = f(i)$ n'est pas spécifique du mécanisme auquel elle est liée; elle dépend par exemple de la vitesse de rotation du rotor de la dynamo-série. La période et l'amplitude du mouvement stationnaire, comme celle du courant (sur le cycle limite) dépendent de cette vitesse de rotation.

Le même graphique contient deux courbes qui

ont des significations différentes; elles n'ont que les abscisses communes, les ordonnées ne représentent pas la même grandeur. Il y a d'une part la caractéristique, dont un arc limité est parcouru alternativement dans les deux sens par le point représentatif qui oscille pour ainsi dire de part et d'autre

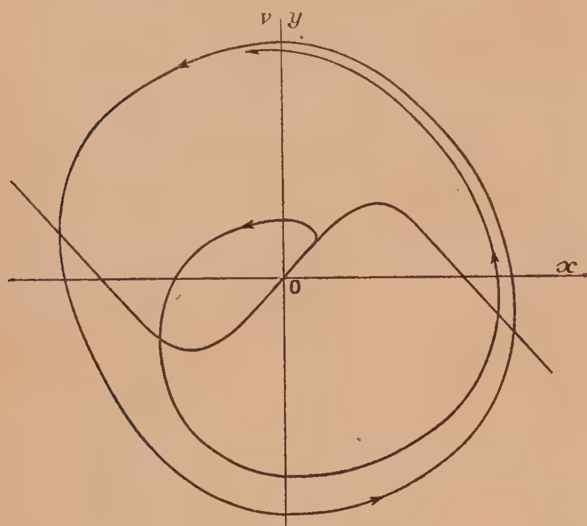


Fig. 3.

du point O qui représente la position d'équilibre, mais d'équilibre instable, car le moindre écart s'exagère jusqu'à ce que les oscillations atteignent leur amplitude stationnaire. Au contraire l'« image » du mouvement, avec le cycle limite auquel elle aboutit, représente à peu près la vitesse avec laquelle le point représentatif parcourt l'arc de caractéristique. Cette vitesse est PM. Sa connaissance permet de construire graphiquement x, donc i, en fonction de t (*fig.* 3 *bis*).

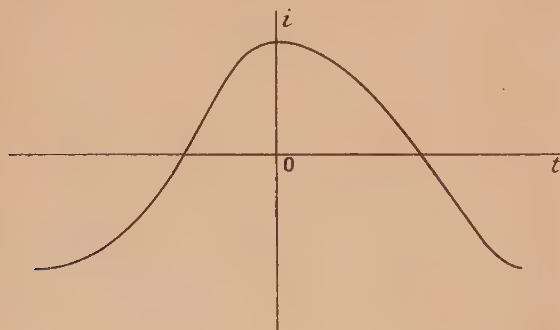


Fig 3 *bis*.

2. **Charge et décharge d'un condensateur à travers un tube au néon.** — Nous allons examiner maintenant des oscillations que tout le monde s'accorde à considérer comme des oscillations de relaxation : les oscillations observées dans un tube au néon monté suivant le schéma de la figure 4. Le condensateur C se charge à travers la résistance R; quand la différence de potentiel entre ses bornes est assez élevée, il se décharge à travers le tube au néon mis en série avec une résistance r, puis le même processus se répète.

Cette expérience, très souvent décrite avec des variantes nombreuses, a été précisée par Moussiegt [1]. Posons

$$v_1 = V_H - V_B, \qquad v = V_F - V_D;$$

v_1 mesure la somme des f. é. m. que l'on rencontre en allant de H jusqu'à B à travers la source de courant

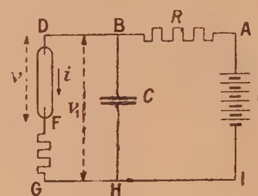


Fig. 4.

et la résistance R : elle vaut

$$v_1 = E - R\left(i + C\frac{dv_1}{dt}\right);$$

donc

$$CR\frac{dv_1}{dt} = E - v_1 - Ri,$$

et comme

$$v_1 = v + ri, \qquad v = E - (R + r)i - CR\frac{dv_1}{dt}. \quad (6)$$

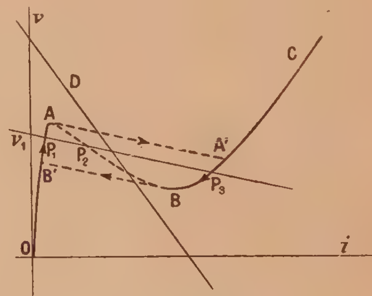


Fig. 5.

Par ailleurs le courant i et la différence de potentiel v sont liés par une relation traduite graphiquement par la caractéristique du tube au néon. C'est une caractéristique en N par rapport aux variables i et v. Elle est représentée dans la figure 5 par la courbe OB'ABA'C, où la partie descendante AB a été dessinée en traits interrompus. Sur cette courbe $v = f(i)$. Mais, d'autre part, $v = v_1 - ri$. Le point de fonctionnement du tube au néon est

à la fois sur la caractéristique et sur la droite $v = v_1 - ri$ Comme il y a trois points de rencontre, on pourrait penser qu'il y a trois régimes possibles représentés par chacun de ces points. Il n'en est rien, et c'est le point essentiel qui a été signalé par Moussiegt.

En régime permanent, on aurait d'après (6) :

$$v = E - (R + r)i.$$

Traçons cette droite qu'on appelle la droite de charge. L'un des points P ne représente un état d'équilibre que s'il se trouve sur D en même temps que sur la caractéristique, On pourrait discuter la stabilité, mais l'essentiel n'est pas là, car la branche descendante est plus qu'instable ,elle est inaccessible.

En effet, à gauche de D,

$$v < E - (R + r)i, \quad \text{donc} \quad \frac{dv_1}{dt} > 0;$$

à droite de D,

$$v > E - (R + r)i, \quad \text{donc} \quad \frac{dv_1}{dt} < 0.$$

Lorsqu'on applique la tension, le courant s'établit suivant OA. Tout près de A, v atteint un maximum, le point représentatif ne peut plus monter, puisqu'il lui faudrait quitter la caractéristique; il ne peut pas descendre, puisque v_1 ne peut pas décroître; il ne peut pas non plus rester en A puisque alors dv_1 serait nul, alors que v n'est pas égal à $E - (R + r)i$. Il ne reste qu'une possibilité; le point représentatif saute de A en A′. Mais là, il faut que v_1 décroisse; aussitôt en effet le point représentatif parcourt l'arc A′B, arrive à peine plus loin que B et saute de nouveau, cette fois de B en B′. Il remonte en A, saute en A′, etc., décrivant le cycle B′AA′BB′.

Pour interpréter cette opération, nous pouvons faire abstraction de la branche AB, puisqu'elle est inaccessible et dire que la caractéristique se compose de deux arcs de courbe OA et BC représentant deux régimes différents : d'une part la décharge par ionisation spontanée et la décharge de Townsend (OA), d'autre part la décharge autonome luminescente (BC).

Quand on applique la tension, on crée le premier régime, mais le courant i étant faible, la chute de tension correspondante dans R est faible et le condensateur se charge. En A on atteint la tension d'allumage le tube devient lumineux, tandis que le courant prend une bien plus grande valeur qui crée une forte chute de tension dans R et décharge C. On atteint le potentiel d'extinction en B; la décharge autonome cesse avec la luminescence et le courant se réduit de nouveau au courant d'ionisation spontanée, reproduisant le même cycle.

En fait cette description est un peu trop schématique; il est en particulier impossible d'éviter toute self-induction, mais les observations à l'oscillographe cathodique confirment cette description dans l'ensemble.

Le caractère essentiel de ces oscillations, par où elles se distinguent surtout des oscillations pendulaires, est le passage alterné d'un régime à un autre, aucun des états par lesquels le système passe ne pouvant être un état d'équilibre.

Nous nous proposons de montrer que ce caractère se retrouve dans la plupart des oscillations que l'on a pris l'habitude de considérer comme de relaxation : à l'origine, il y a toujours une source d'énergie et un organe dans aucun desquels n'apparaît directement un caractère périodique; mais l'organe a deux régimes de fonctionnement et les oscillations de relaxation sont dues au passage alternatif de l'un à l'autre.

3. **Oscillations du dynatron.** — Rappelons que le dynatron est une triode dont la grille est portée à un potentiel positif élevé (300 à 400 V), la plaque étant portée à un potentiel positif moins élevé. Lorsqu'on fait croître le potentiel de la plaque,

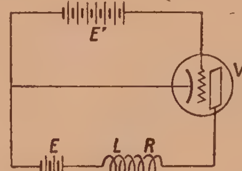


Fig. 6.

V, le courant plaque, i, d'abord nul augmente progressivement; il diminue ensuite à cause de l'émission d'électrons secondaires qui sont absorbés par la grille, puis il recommence à augmenter au fur et à mesure que, le potentiel V de la plaque continuant à augmenter, la plaque réabsorbe elle-même de plus en plus les électrons secondaires qu'elle avait émis.

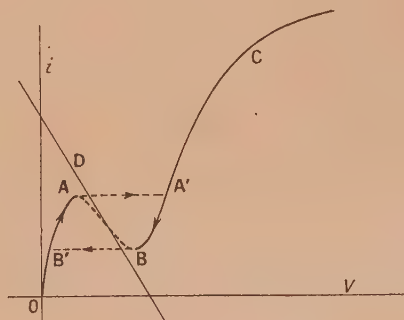


Fig. 7.

Le potentiel V de la plaque est lié au courant par la relation

$$V = E - Ri - L\frac{di}{dt}.$$

Traçons la droite $V = E - Ri$ sur le même graphique que la caractéristique (*fig.* 7).

Dans la région à droite de D,

$$V > E - Ri, \quad \text{donc} \quad \frac{di}{dt} < 0;$$

à gauche de D,

$$V < E - RI, \quad \text{donc} \quad \frac{di}{dt} > 0.$$

Il en résulte que l'arc AB est inaccessible, les autres arcs étant forcément parcourus dans le sens des flèches. Il s'établit des oscillations suivant le cycle AA′BB′A. Le dynatron fonctionne alternativement sous deux régimes : le régime OA, courant direct, le régime BA′C, courant direct avec émission secondaire. Lors du fonctionnement, on passe alternativement d'un régime à l'autre, le régime transitoire AB étant exclu.

Les oscillations du dynatron correspondent à celles du tube au néon selon la règle de dualité qui fait correspondre deux phénomènes par échange simultané des potentiels et des intensités, des selfs et des capacités, des résistances et des conductances.

Dans les deux exemples que nous venons d'examiner, nous avons trouvé une caractéristique en N analogue à la caractéristique en S de la dynamo-série du premier exemple. L'existence de cette caractéristique n'y a nullement la même importance puisque les branches à pente positive sont seules effectives. Il semble que l'on ait accordé à cette caractéristique un rôle qu'elle n'a pas dans les oscillations de relaxation et qu'il soit impossible de trouver une généralisation qui ramènerait toutes les oscillations à un modèle unique. C'est ce que nous allons essayer de montrer avec les exemples qui suivent.

4. **Le culbuteur.** — Nous allons examiner maintenant, dans le domaine de la mécanique, deux oscillations très simples que l'on considère habituellement comme les oscillations de relaxation les plus typiques : le culbuteur et le vase de tantale.

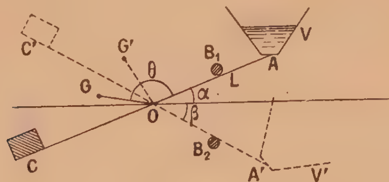


Fig. 8.

Nous supposerons le culbuteur constitué par un fléau AC mobile autour de l'axe O et pouvant osciller entre deux positions extrêmes définies par les angles α et β, et déterminées par les butoirs B_1 et B_2. Le fléau porte d'un côté un vase V qui peut recevoir de l'eau, dont le centre de gravité reste sur la verticale de A, de l'autre côté un contrepoids. Le centre de gravité du fléau reste à gauche de la verticale et au-dessus de l'horizontale de l'axe O.

Quand le vase est vide, le culbuteur appuie contre le butoir B_1; il reste appuyé contre ce butoir, même quand le vase contient de l'eau, aussi longtemps que la masse d'eau est assez faible, à côté de celle du fléau, pour laisser subsister l'inégalité

$$Mgl\cos(\alpha + \theta) > mgL\cos\alpha.$$

Le culbuteur bascule dès que $mgL\cos\alpha$ devient légèrement supérieur à $MgI\cos(\alpha + \theta)$. Il bascule alors complètement, le fléau allant buter contre B_2 tandis que le vase V se vide rapidement. Dès que

$$mgL\cos\beta < Mgl\cos(-\beta + \theta),$$

le culbuteur bascule de nouveau en sens contraire.

Ainsi le culbuteur ne peut se trouver immobile que dans deux positions seulement :

1° Il bute B_1 et se trouve soumis au couple

$$\Gamma_1 = Mgl\cos(\alpha + \theta) - mgL\cos\alpha$$

tant que $\Gamma_1 > 0$. Dès que $\Gamma_1 < 0$, il culbute et vient s'appuyer contre B_2 avec le couple

$$\Gamma_2 = Mgl\cos(\theta - \beta) - mgL\cos\beta,$$

aussi longtemps que Γ_2 est négatif. Il culbute contre B_1 dès que Γ_2 devient positif.

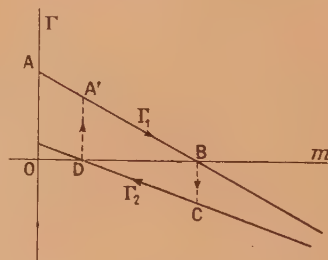


Fig. 9.

Représentons les couples en fonction de m, le point représentatif décrit A′B, saute en C, décrit CD, saute en A′, etc., décrivant le cycle A′BCD. Ce graphique n'a rien de commun avec une caractéristique au sens où nous l'entendons dans les figures 1 et 2. Du reste on ne peut pas représenter le fonctionnement du culbuteur par une équation du type (4), puisqu'il n'existe pas de force de rappel pour introduire le terme y. La même remarque s'applique à la plupart des oscillations de relaxation que nous allons décrire.

5. **Le vase de tantale.** — Il est alimenté par un débit constant D_1 puis vidé par un siphon avec un débit D_2, la différence des pressions entre les deux extrémités du siphon étant ρgL.

Représentons graphiquement le débit du siphon en fonction de h (*fig.* 11). Tant que h est inférieur

à l, ce débit est nul. Au moment où h devient égal à l, le siphon s'amorce, le débit prend sa valeur de régime qui persiste tant que le niveau libre du

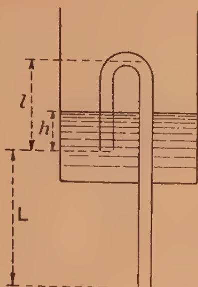


Fig. 10.

liquide est au-dessus de $h = 0$. Il augmente un instant pendant que le siphon se vide, si le tube est assez étroit pour que l'eau de la colonne ascendante soit entraînée, puis s'annule.

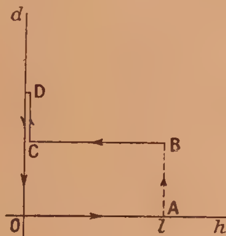


Fig. 11.

Ici encore, le point représentatif du régime du siphon décrit un cycle OABCDO en passant, presque en sautant, d'un régime à l'autre.

6. **Tourbillons périodiques.** — Les oscillations auxquelles nous pensons sont d'abord celles des tourbillons alternés ou allées de tourbillons décrits par Bénard et étudiés en particulier par Karman. Tout le monde s'accorde à les classer parmi les oscillations de relaxation, sans raison bien précise, probablement avec ce seul sentiment que toute oscillation qui n'est pas sinusoïdale est de relaxation.

Pour simplifier, nous ne considérerons pas les allées de tourbillons derrière un obstacle cylindrique, mais les tourbillons annulaires qui se détachent périodiquement derrière un obstacle sphérique, immergé dans un fluide en écoulement régulier.

Quand le fluide coule lentement, le régime est laminaire et la poussée sur l'obstacle est due uniquement à la viscosité : si l'on en fait abstraction, la face arrière reçoit la même poussée que la face antérieure.

Si la vitesse de l'écoulement augmente, les filets fluides se détachent derrière l'obstacle et il se forme un tourbillon annulaire stable d'autant plus intense que l'écoulement est plus rapide. C'est le régime turbulent à sillage en cœur. Ce tourbillon est soumis à deux forces : une force exercée par le liquide en mouvement et la poussée de l'obstacle. Tant que le tourbillon ne bouge pas, c'est que les deux forces se font équilibre. Mais quand la vitesse du fluide devient assez grande, le fluide entraîne le tourbillon. Un tourbillon annulaire se détache périodiquement derrière l'obstacle.

On peut dire qu'il se détache quand la force qui s'applique contre l'obstacle devient négative. Le tourbillon reste dès lors soumis à une force constante puisque son mouvement est uniforme, une partie seulement de cette force prenant son point d'appui sur l'obstacle.

L'analyse détaillée serait sans doute très difficile, mais il suffit des renseignements que peut fournir l'analyse dimensionnelle. Il semble que la force avec laquelle le tourbillon agit sur l'obstacle ne dépende que de son intensité I, de sa distance D à l'obstacle, de la densité du fluide et de sa vitesse d'écoulement. La force dépendrait alors de I et de D par le quotient $\frac{I^2}{D}$ et il y aurait deux régimes :

1° le tourbillon se forme en restant collé derrière l'obstacle, I augmente, D variant peu.

2° Le tourbillon se décolle, I restant constant et D augmente, tandis que le tourbillon s'éloigne.

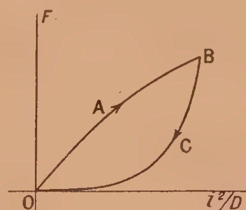


Fig. 12.

Cela donne naissance au cycle OABCO décrit dans le sens des flèches. Chaque tourbillon donne naissance à un cycle identique et la force exercée sur l'obstacle varie périodiquement. Un nouveau tourbillon naît aussitôt que le précédent s'est décollé et avant qu'il ait cessé de faire sentir son action; cela ne modifie pas le cycle OABCO, mais chaque cycle est attaqué avant que le précédent soit achevé : il faut en tenir compte si l'on veut évaluer la force exercée sur l'obstacle en fonction du temps. Sans connaître de loi quantitative sur cette force, on peut penser qu'elle a, en fonction du temps, l'allure de la courbe ABC (*fig.* 12 *bis*). Le cycle suivant A'B'C' commence aussitôt que le tourbillon se décolle et la résultante est la courbe en traits gras.

Ces oscillations s'observent très facilement avec une flamme de gaz ou de bougie. On peut observer

une grande flamme éclairante de gaz, on y voit les volutes formées par ces tourbillons annulaires. Pour les voir avec une flamme de bougie, il est bon de projeter cette flamme en ombre chinoise sur un écran blanc avec une source de lumière presque ponctuelle et brillante, comme un petit cratère positif d'arc au charbon. Si l'atmosphère environnante est très calme, on voit très bien les tourbillons se former et se détacher tour à tour. Leur sens est opposé à celui des tourbillons derrière un obstacle et ils produisent une succion de la flamme. Quand les tourbillons se forment un peu trop bas, on voit la flamme vaciller : le vacillement d'une flamme de bougie est un exemple d'oscillations de relaxation.

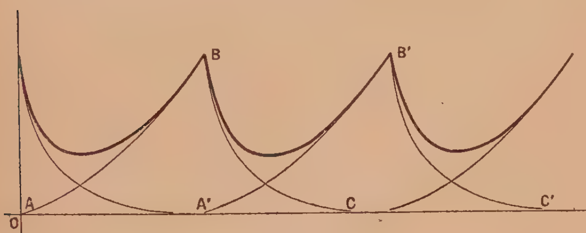


Fig. 12 *bis*.

Pour une connaissance plus précise des oscillations de ces tourbillons, il faudrait connaître plus de choses sur eux. Karman et Rubach [7] ont établi que, dans les allées de tourbillons alternés, le produit UT de la vitesse d'écoulement par la période de décollement des tourbillons est constant. Cela amène à penser que les tourbillons se détachent toujours lorsqu'ils atteignent la même intensité et inciterait à penser que le cycle OABCO de la figure 12 serait toujours le même, quelle que soit la vitesse du fluide et ne dépendrait que de la forme de l'obstacle, de son rayon s'il est sphérique. Les oscillations auraient une amplitude constante et une période variable.

En résumé, il semble que les oscillations des tourbillons rentrent bien dans la même catégorie que celles des exemples 4 et 5, parce que l'on y rencontre un cycle invariable décrit par alternance de deux régimes, avec une vitesse qui dépend de la vitesse d'écoulement.

L'exemple suivant est peut-être encore moins simple; il est très instructif et montre qu'on n'est pas plus fondé à opposer les oscillations sinusoïdales aux oscillations de relaxation qu'aux oscillations pendulaires auto-entretenues.

7. **Vibrations d'une corde frottée par un archet.** — Pour simplifier le raisonnement, nous remplacerons la corde par une corde idéale dont la masse serait concentrée en son centre, où l'archet frotte. On sait que l'archet doit être colophané : la colophane a certainement pour but d'augmenter le coefficient de frottement, mais nous admettrons, — cela paraît nécessaire — que le coefficient de frottement au repos est nettement supérieur au frottement de mouvement.

Appelons u la vitesse de l'archet, v la vitesse de la corde au point frotté. Si u était très grand, l'archet glisserait sans cesse sur la corde et ne modifierait pas son mouvement, même pour l'amortir. En effet, le mouvement sans frottement solide étant défini par

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0,$$

cette équation devient, si l'on ajoute une force de frottement constante f,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k\left(x-\frac{f}{k}\right)=0.$$

Le frottement solide remplace x par $x-\frac{f}{k}$ sans influer ni sur $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, ni sur $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

Si l'on représente, les vibrations de la corde dans un diagramme en prenant comme coordonnées $\sqrt{\frac{k}{m}}x$ ou ωx et $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, le point représentatif du mouvement amorti est la spirale

$$\rho=A\,e^{-\frac{h}{2m}\frac{\theta}{\omega}\theta},\qquad \text{avec}\quad \theta=\omega t,$$

le centre étant le point de coordonnées $v=0$ et $\omega\frac{f}{k}$.

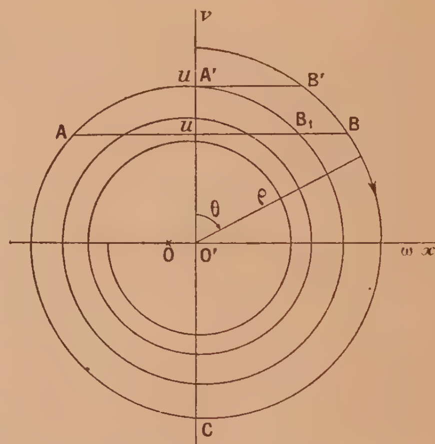


Fig. 13.

Si maintenant la vitesse de l'archet devient inférieure à la vitesse maximum de la corde, celle-ci adhère à l'archet quand sa vitesse est u (point A) et l'archet la conduit jusqu'au point B, où la force de frottement n'est plus suffisante pour entraîner la corde; celle-ci se libère et le point représentatif décrit l'arc BCA de spirale en mouvement libre.

L'archet la saisit de nouveau lorsque le point arrive en A, etc.

La corde oscille avec une période nettement supérieure à sa période propre : en effet, l'archet la conduit de l'élongation A à l'élongation B avec une vitesse u toujours inférieure à la vitesse avec laquelle la corde, libre, irait de l'élongation de A à celle de B'_1.

Pour modifier la période propre le moins possible tout en entretenant les vibrations de la corde, il faut tirer l'archet plus vite ($u' > u$) tout en appuyant moins fort, de façon à entraîner la corde du point A′ au point B′. Le mouvement réel diffère alors extrêmement peu d'un mouvement sinusoïdal, et il serait difficile de faire apparaître la différence dans un graphique représentant x en fonction de temps.

Toutes ces considérations s'appliquent à une corde réelle dont la masse est répartie uniformément sur toute sa longueur. Il faut faire intervenir la position du point frotté sur la corde. L'exposé sortirait du cadre de cette discussion et n'y ajouterait rien.

Pour nous résumer, nous constatons que deux régimes se succèdent au cours d'une période : l'un d'eux, représenté par la droite AB ou A′B′, pendant lequel la corde adhère à l'archet, l'autre, représenté par l'arc de spirale BCA ou B′CA′, pendant lequel la corde oscille librement. Cette constation nous amène à conclure que si, en toute rigueur, ces oscillations sont bien des oscillations de relaxation, elles peuvent néanmoins être extrêmement voisines d'oscillations sinusoïdales, si l'on choisit convenablement les conditions du frottement de l'archet. Le violoniste s'attache justement à faire dominer le régime sinusoïdal en réduisant autant qu'il le peut le régime d'entraînement par l'archet. Il devient presque légitime de parler d'oscillations pendulaires simples non amorties.

Il ne faut pas opposer les oscillations sinusoïdales aux oscillations de relaxation, ce dernier exemple montrant que des oscillations de relaxation peuvent avoir un caractère sinusoïdal aussi marqué que des oscillations pendulaires entretenues.

Conclusion. — On pourrait énumérer encore beaucoup d'autres oscillations de relaxation. Signalons les machines à valve ou à soupape, qui, sans cet accessoire, auraient un mouvement pendulaire d'aller et retour et où la valve crée un régime nouveau et une sorte d'irréversibilité en substituant le parcours d'un cycle à un aller et retour par la même voie : c'est le cas des pompes. C'est aussi celui de la machine à vapeur à piston, où le cycle peut faire succéder plus de deux régimes, par exemple le cycle de Carnot fait se succéder quatre régimes.

Définitions. — Ces exemples conduisent à proposer les définitions suivantes :

A. *Oscillations pendulaires libres.* — Ce sont les oscillations bien connues définies par l'équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=0,$$

avec des coefficients positifs constants, h étant assez petit.

B. *Oscillations pendulaires auto-entretenues.* — Ce sont les oscillations représentées par l'équation de van der Pol :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+hf(x)\frac{dx}{dt}+kx=0,$$

avec les conditions $h > 0$, $f(x) = -1$ quand $x = 0$, $f(x) < 0$ quand x est assez petit, $f(x) > 0$ quand x est grand.

Les oscillations pendulaires se produisent autour d'un état d'équilibre $x = 0$ qui agit comme centre d'attraction avec la force $-kx$: c'est un balancement comparable à celui du pendule mais, avec deux différences importantes :

1° La position $x = 0$ est instable, car dès que le système prend un léger mouvement, la force $-hf(x)\frac{dx}{dt}$ l'exagère jusqu'à ce que, $f(x)$ devenant positif, la force $-hf(x)\frac{dx}{dt}$ devienne une force d'amortissement, avec un sens opposé à celui de $\frac{dx}{dt}$.

2° Les oscillations stationnaires ne sont pas sinusoïdales quand h est grand.

C. *Oscillations de relaxation.* — Ce terme s'applique aux oscillations d'un système qui évolue entre deux régimes distincts et passe alternativement de l'un à l'autre, souvent par sauts et sans passer par un état intermédiaire qui serait un état d'équilibre.

Si l'on accepte ces définitions, on ne peut pas admettre, comme on le lit quelquefois, que les oscillations de relaxation ont une amplitude déterminée et une fréquence arbitraire, tandis que les oscillations pendulaires ont une fréquence déterminée et une amplitude arbitraire.

Les oscillations pendulaires simples libres ont en effet une période déterminée et une amplitude arbitraire et cela reste à peu près vrai quand il existe un faible amortissement. Mais dès qu'on fait agir une énergie extérieure qui compense l'amortissement, les oscillations stationnaires, représentées par le cycle limite de Poincaré, ont une période et une amplitude déterminées. La résonnance est un cas très intéressant où le cycle limite est un cercle parcouru par le point représentatif avec une vitesse angulaire constante : les oscillations sont insusoïdales, mais la fréquence aussi bien que l'amplitude dépendent de la force qui produit la résonnance.

Dans les oscillations de relaxation que nous avons

étudiées en premier lieu et qui sont les types les plus habituels, l'amplitude est constante tandis que la fréquence dépend de l'alimentation (tension électrique ou débit liquide). Par contre, il n'est pas question de constance de l'amplitude dans la corde frottée. On pourrait concevoir des doutes sur la légitimité de cette classification si l'on ne trouvait pas d'autres exemples d'oscillations à amplitude variable.

Les premiers exemples, choisis uniquement parce qu'ils sont les plus habituels et en tout cas très caractéristiques, peuvent paraître conçus pour réaliser une amplitude invariable. On peut faire disparaître cette invariance par une légère complication supplémentaire.

Prenons par exemple le vase de tantale et modifions-le de façon qu'il s'amorce par un autre procédé que l'affleurement du liquide au raccordement des deux branches. A cet effet le tube du siphon est percé en C d'un orifice assez étroit pour ne pas gêner le fonctionnement du siphon. La branche longue est obturée en bas par un bouchon B tenu au bout d'un levier mobile autour d'un axe horizontal O et appuyé contre le tube par un contrepoids P. Le tube DB s'emplit par l'orifice C, avec un débit proportionnel à la hauteur du niveau libre au-dessus de C jusqu'à ce que l'eau atteigne une hauteur suffisante au-dessus de B pour faire basculer le levier et amorcer le siphon.

Fig. 14.

Le calcul n'a pas grand intérêt, il confirme, ce que l'on prévoit sans lui, que, dans ce dispositif, l'amplitude varie avec le débit qui alimente le vase de tantale : elle augmente quand ce débit augmente; la fréquence est bien plus constante que l'amplitude si le réservoir a une grande section.

Cependant les oscillations restent du même type, et cet exemple suffit à prouver, à l'appui de ce que montrait déjà la corde frottée, qu'en général, dans les oscillations de relaxation, l'amplitude, comme la période, dépendent de toutes les circonstances du fonctionnement du système oscillant.

Couplage. — Nous terminerons par une brève considération sur le couplage d'un système à oscillations de relaxation avec un système à oscillations pendulaires. Partant de cette idée que la période des oscillations de relaxation est mal déterminée, on dit souvent que le couplage ajuste la période du système à relaxation sur celle du système pendulaire.

L'adaptation n'est pas à sens unique et elle dépend du problème posé. Considérons par exemple le sifflement du vent sur les fils télégraphiques. Il est dû aux vibrations du fil entretenues par les tourbillons alternés que le fil provoque dans l'air en écoulement uniforme. Le système à oscillations harmoniques est couplé avec un système à oscillations de relaxations. Le son fondamental de cette « corde vibrante » est très grave, mais parmi ses harmoniques de rang élevé, dont les fréquences sont relativement très voisines, c'est celui dont la période est la plus voisine de l'oscillation de relaxation qui est excité presque seul. Sans doute réagit-il sur le courant d'air pour lui imposer sa propre fréquence; en effet, ces tourbillons constituent un système assez labile, très sensible à une faible variation de pression et par conséquent très adaptable à une influence extérieure.

Cette accommodation est certainement encore plus marquée dans un tuyau à embouchure de flûte. Les vibrations de l'air du tuyau sont excitées et entretenues par les tourbillons alternés que le souffle provoque sur l'embouchure du tuyau. Elles commandent à leur tour le décollement des tourbillons qui les entretiennent.

Que se passe-t-il quand des systèmes à oscillation de relaxation plus rigides sont couplés à des sytèmes à oscillations pendulaires ? Il ne semble pas que le problème ait été étudié systématiquement. On s'est arrêté plutôt aux systèmes à relaxation alimentés par impulsion et constituant des démultiplicateurs de fréquence.

Les exemples traités ont été schématisés; dans chacun d'eux, la réalité ajoute plus ou moins de complications, mais seulement dans le détail; elle laisse subsister les principaux caractères par lesquels nous avons essayé de bien marquer la différence entre les deux types d'oscillations auto-entretenues.

Manuscrit reçu le 12 juillet 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Oscillations sinusoïdales et de relaxation. *Onde électrique*, 1930, **9**, 245 à 256, 293 et 312.

[2] Andronow A. — Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues. *C. R. Acad. Sc.*, 1929, **189**, 559.

[3] Les systèmes auto-entretenus et les oscillations de relaxation. *Conférences d'actualités scientifiques et industrielles*, **27**, Hermann, Paris, 1931.

[4] Les tubes à vide et leurs applications (traduction Labin) **3**, 91.

[5] Étude des oscillations entretenues. *Rev. gén. Électr.*, 1928, 901-946.

[6] Moussiegt. — *Ann. Physique*, 1949, **4**, 622.

[7] *Physik Z.*, 1912, **13**, 57.

L'ABSORPTION DE LA VAPEUR D'EAU ATMOSPHÉRIQUE DANS LE PROCHE INFRAROUGE (LES BANDES A 2,7 ET 1,8 μ)

Par Mme R. MATHIS.

Laboratoire annexe du Laboratoire de Recherches physiques de la Sorbonne (P. C. B.).

Sommaire. — Les bandes de la vapeur d'eau à 2,7 et 1,8 μ ont été étudiées au moyen d'un spectrographe à réseau à cellule au sulfure de plomb. On a essayé d'interpréter une partie des bandes de rotation-vibration obtenues au moyen des transitions permises entre les niveaux d'énergie de la molécule dans les états (1, 0, 0) (0, 0, 1) (0, 1, 1) et l'état fondamental (0, 0, 0), et l'on a calculé les constantes de rotation dans les trois états (1, 0, 0) (0, 0, 1) et (0, 1, 1).

L'étude des spectres de rotation pure et de vibration-rotation de la molécule d'eau a permis d'attribuer à celle-ci une structure triangulaire symétrique.

On observe, dans le proche infrarouge, deux fortes bandes d'absorption autour de 1 595 cm^{-1} et de 3 756 cm^{-1}. La première est attribuée à la vibration de déformation et la seconde à la vibration antisymétrique de valence, on les désigne respectivement par $\nu_2 \parallel$ et $\nu_3 \perp$, les symboles $\parallel$ et $\perp$ rappelant que dans la vibration ν_2 la variation du moment électrique est parallèle à l'axe de symétrie de la molécule, et que dans la vibration ν_3 elle lui est perpendiculaire. La vibration symétrique de valence (3 652 cm^{-1}) est alors désignée par $\nu_1 \parallel$ Elle a été séparée de ν_3 récemment par Nielsen.

Nielsen a d'ailleurs introduit une autre nomenclature, qui sera adoptée ici. Une vibration est dite parallèle ou perpendicualire lorsque la variation du moment électrique est parallèle ou perpendiculaire à l'axe de plus petit moment d'inertie de la molécule. Les bandes étudiées dans ce qui suit seront désignées par les symboles

$$\nu_1 \perp, \quad \nu_3 \parallel, \quad \nu_2 + \nu_3 \parallel.$$

Dans le problème général du rotateur dans l'espace, le moment angulaire total prend les valeurs quantifiées suivantes :

$$\sqrt{J(J+1)}\,\frac{h}{2\pi} \qquad (J \text{ entier} \geq 0).$$

Dans le cas d'un rotateur symétrique, chaque niveau de rotation J se subdivise en $J+1$ sous niveaux caractérisés chacun par un nombre K entier compris entre 0 et J; le niveau $K = 0$, est simple et tous les autres sont doublement dégénérés.

Dans le cas du rotateur asymétrique, auquel se rattache la molécule d'eau, la dégénérescence est levée, et le niveau J se subdivise en $2J+1$ sous niveaux distincts, qu'on désigne généralement par un indice :

$$J_{+J}, \quad J_{+J-1}, \quad \ldots, \quad J_0, \quad \ldots, \quad J_{-J+1}, \quad J_{-J};$$

qui n'est pas un nombre quantique, mais un simple numéro. On appelle J_{+J} le sous-niveau le plus élevé et J_{-J} le sous-niveau le moins élevé.

De nombreux auteurs ont étudié le spectre d'absorption infrarouge de la vapeur d'eau. Sleator [1] (1912), Sleator et Phelps [2] (1925), ont obtenu les spectres des bandes de 1,38, 1,87, 2,66 et 6,26 μ avec une résolution déjà considérable, mais insuffisante pour l'étude de la structure rotationnelle. Sleator et Plyler [3] (1931) ont analysé ces mêmes bandes avec une meilleure résolution; ils ont obtenu 3 à 4 fois plus de raies que dans les travaux de 1918 et 1925. Bonner [4] (1931) a évalué les constantes d'harmonicité et d'anharmonicité de la molécule.

C'est Mecke [5] qui a le premier réussi l'analyse de la structure rotationnelle de ces bandes. L'interprétation théorique qu'il en a donnée alors reste encore valable aujourd'hui à ceci près qu'il ne tient pas compte de la force centrifuge; on a montré depuis que celle-ci n'a qu'une action très faible tant que J est petit, mais, quand J est élevé, il n'en est plus ainsi; la correction à apporter de ce fait au niveau 3_3 est déjà de l'ordre de 1 cm^{-1} et pour le niveau 4_4 elle atteint 5 cm^{-1}.

Des progrès considérables ont été faits récemment. Randall, Dennison, Ginsburg et Weber [6] ont enregistré le spectre de rotation pure de la vapeur d'eau donné par un appareil à grande dispersion (18 à 75 μ). A partir des moments d'inertie données par Mecke, ils ont calculé les niveaux de rotation pure jusqu'à $J = 11$. La comparaison entre les niveaux calculés et observés indique des écarts faibles pour les faibles valeurs de J, mais qui croissent rapidement avec J (279 cm^{-1} pour le sous-niveau 11_{11}). Ces différences peuvent être attribuées principalement à l'effet de la force centrifuge, la molécule d'eau n'étant pas rigoureusement indéformable.

Darling et Dennison [7] ont évalué les moments d'inertie de la molécule et les constantes de la fonctions potentielle. Shaffer et Nielsen [8] ont établi

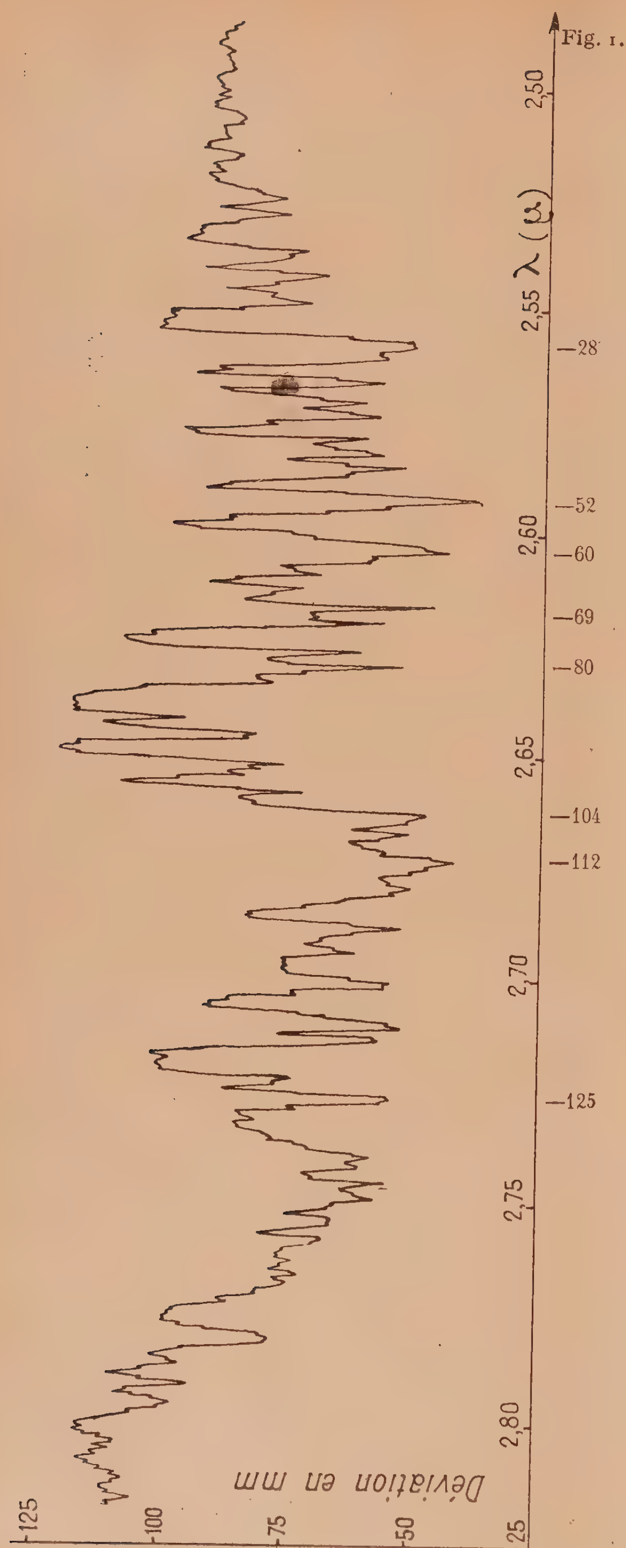


Fig. 1.

Fig. 2.

la théorie complète des molécules triatomiques non linéaires, et écrit les équations séculaires qui permettent de déterminer les niveaux d'énergie de vibration rotation jusqu'à $J = 4$; ils tiennent compte de tous les termes provenant de l'interaction entre la vibration et la rotation et de tous ceux pro-

venant de l'anharmonicité du potentiel, à l'approximation du deuxième ordre. H. H. Nielsen [9, 10] a calculé les niveaux de vibration-rotation jusqu'à $J = 6$, pour les bandes ν_2 (6,26 μ) $2\nu_2$ (3,3 μ), ν_1 et ν_3 (2,7 μ), $\nu_2 + \nu_3$ (1,87 μ) et il a obtenu d'autre part, pour ces mêmes bandes, des spectres d'une résolution qui n'avait jamais été atteinte auparavant.

Dans le présent travail, l'étude des deux bandes à à 2,7 et 1,87 μ a été reprise au moyen d'un spectrographe à réseau; le récepteur est une cellule au sulfure de plomb refroidie par de la neige carbonique. Le signal de cellule est amplifié et commande un dispositif enregistreur. Ce montage a été décrit dans un précédent article [11]. (Les cellules au sulfure de plomb ont déjà été utilisées récemment par différents auteurs, pour l'étude de la structure fine des bandes de vibration-rotation de la molécule d'eau [12, 13, 14]). Le réseau, du type « échelette », tracé par le professeur Wood, à 815 traits/cm, et 7,2 cm de large. Les fentes d'entrée et de sortie sont ajustées à la même largeur (0,04 mm); elles occupent, dans le spectre, un domaine de 8 Å, ce qui correspond à l'utilisation à peu près totale du pouvoir de résolution du réseau. Les spectres ont été étalonnés, en identifiant quelques grandes bandes à celles correspondantes de Plyler et Sleator [3].

Bandes ν_1 et ν_3 à 2,7 μ. — Entre les fréquences 3 952 cm⁻¹ et 3 601,6 cm⁻¹, il apparaît 186 bandes de vibration-rotation (*fig.* 1), que l'on doit attribuer à la superposition des deux bandes ν_1 et ν_3 (les deux bandes ne sont pas du même genre et la résonance n'intervient pas). Dans cet intervalle, H. H. Nielsen a observé 116 raies qu'il explique par des transitions entre les divers sous-niveaux correspondant à $J = 1$, 2, 3, 4, 5, 6. Il a déterminé ces niveaux, comme il a été indiqué, par un calcul très complet. Ses résultats ont été utilisés pour l'interprétation des bandes que j'ai observées, et j'ai tenté de calculer les niveaux qui correspondent à des valeurs plus élevées de J. Le calcul complet est déjà difficile et long pour $J = 6$. J'ai déterminé, de $J = 7$ à $J = 11$, les sous-niveaux

$$J_{+J},\quad J_{J-1},\quad J_{J-2},\quad J_{J-3},\quad J_{-J+3},\quad J_{-J+2},\quad J_{-J+1},\quad J_{-J}.$$

Le calcul des niveaux d'énergie de vibration-rotation des molécules rotateurs asymétriques a été fait par Witmer [15], Wang [16], Kramers et Ittmann [17, 18] Klein [19], Ray [20]. Ces auteurs ont donné différentes formules, dont les plus utilisées sont celles de Wang

$$F(J_\tau) = \frac{1}{2}(B+C)J(J+1) + \left[A - \frac{1}{2}(B+C)\right]W_\tau$$

et celle de Ray, corrigée par King, Hainer et Cross [21]

$$F(J_\tau) = \frac{1}{2}(A+C)J(J+1) + \frac{1}{2}(A-C)E_\tau,$$

où W_τ et E_τ sont des fonctions de τ et des constantes de rotation

$$A = \frac{h}{8\pi^2 cI_A},\qquad B = \frac{h}{8\pi^2 cI_B},\qquad C = \frac{h}{8\pi^2 cI_C}.$$

Pour chaque valeur de J, ces fonctions prennent $2J+1$ valeurs différentes correspondant chacune à un sous-niveau. Ces $2J+1$ valeurs sont les racines de déterminants séculaires de degré $2J+1$, dont la résolution est pénible. Toutefois Mecke [5] a montré que, pour une molécule différent peu d'un rotateur symétrique allongé ($B \simeq C$) pour lequel on aurait $W_\tau = K^2$, les deux sous-niveaux les plus élevés sont donnés par

$$\frac{1}{2}\left[F_{J_{+J}} + F_{J_{+J-1}}\right] = AJ^2 + \frac{1}{2}(B+C)J. \tag{1}$$

Pour une molécule se rapprochant d'un rotateur symétrique aplati ($B \simeq A$), ce sont les deux niveaux les plus bas qui sont représentés par

$$\frac{1}{2}\left[F_{J_{-J}} + F_{J_{-J+1}}\right] = CJ^2 + \frac{1}{2}(A+B)J. \tag{2}$$

Compte-tenu de la différence entre W_τ et K^2, Mecke obtint, au lieu de (1) et (2)

$$\left.\begin{matrix} F_{J_{+J}} \\ F_{J_{J-1}} \end{matrix}\right\} = CJ^2 + \frac{1}{2}(A+B)J + \frac{1}{4}(B-A)J\frac{(2J-1)}{J-1}\varepsilon_C(1+\varepsilon_C^2), \tag{1'}$$

$$\left.\begin{matrix} F_{J_{-J}} \\ F_{J_{-J+1}} \end{matrix}\right\} = AJ^2 + \frac{1}{2}(B+C)J + \frac{1}{4}(B-C)J\frac{(2J-1)}{J-1}\varepsilon_A(1+\varepsilon_A^2), \tag{2'}$$

avec

$$\varepsilon_A = \frac{1}{2}\,\frac{(A-C)-(A-B)}{(A-C)+(A-B)},$$

$$\varepsilon_C = \frac{1}{2}\,\frac{(C-A)-(C-B)}{(C-A)+(C-B)}.$$

Les équations (1′) et (2′) sont valables avec une bonne approximation pour un rotateur fortement asymétrique, dans le calcul des sous-niveaux

$$J_J,\quad J_{J-1},\quad J_{-J+1},\quad J_{-J}.$$

Des formules analogues peuvent servir au calcul des sous-niveaux J_{J-2}, J_{J-3}, J_{-J+3}, J_{-J+2},

$$\left.\begin{matrix} F_{-J+2} \\ F_{-J+3} \end{matrix}\right\} = C(J-1)^2 + \frac{1}{2}(A+B)(3J-1) + \frac{3}{4}(B-A)(J-1)\frac{2J-1}{J-2}\varepsilon_C, \tag{3'}$$

$$\left.\begin{matrix} F_{J-2} \\ F_{J-3} \end{matrix}\right\} = A(J-1)^2 + \frac{1}{2}(B+C)(3J-1) + \frac{3}{4}(B-C)(J-1)\frac{2J-1}{J-2}\varepsilon_A. \tag{4'}$$

Ce sont ces formules qui ont été appliquées à la détermination des sous-niveaux J_J à J_{J-3} et J_{-J+3}

TABLEAU I.

Les niveaux d'énergie de rotation de la molécule d'eau
(d'après Randall, Dennison, Ginskurg et Weber).

J.	ν (cm⁻¹).	
0_0	0	+ +
1_1	42,30	+ —
1_0	37,05	— —
1_{-1}	23,78	— +
2_2	136,10	+ +
2_1	134,81	— +
2_0	95,04	— —
2_{-1}	79,38	+ —
2_{-2}	70,03	+ +
3_3	285,45	+ —
3_2	285,26	— —
3_1	212,07	— +
3_0	206,25	+ +
3_{-1}	173,33	+ —
3_{-2}	142,17	— —
3_{-3}	136,74	— +
4_4	488,24	+ +
4_3	488,24	— +
4_2	383,90	— —
4_1	382,49	+ —
4_0	315,66	+ +
4_{-1}	300,33	— +
4_{-2}	275,21	— —
4_{-3}	224,74	+ —
4_{-4}	221,90	+ +
5_5	742,30	+ —
5_4	742,30	— —
5_3	610,42	— +
5_2	610,42	+ +
5_1	508,86	+ —
5_0	503,94	— —
5_{-1}	446,52	— +
5_{-2}	416,02	+ +
5_{-3}	399,45	+ —
5_{-4}	326,49	— —
5_{-5}	325,23	— +
6_6	1045,34	+ +
6_5	1045,34	— +
6_4	888,89	— —
6_3	888,85	+ —
6_2	757,84	+ +
6_1	756,90	— +
6_0	661,63	— —
6_{-1}	649,11	+ —
6_{-2}	602,78	+ +
6_{-3}	553,00	— +
6_{-4}	542,80	— —
6_{-5}	447,20	+ —
6_{-6}	446,69	+ +
7_7	1395,25	+ —
7_6	1395,26	— —
7_5	1216,63	— +
7_4	1216,63	+ +
7_3	1060,07	+ —
7_2	1059,88	— —
7_1	931,50	— +
7_0	927,92	+ +
7_{-1}	842,65	+ —
7_{-2}	816,78	— —
7_{-3}	782,54	— +
7_{-4}	709,54	+ +
7_{-5}	704,40	+ —
7_{-6}	586,53	— —
7_{-7}	586,32	— +
8_8	1789,77	+ +
8_7	1789,77	— +
8_6	1591,47	— —
8_5	1591,47	+ —
8_4	1411,89	+ +
8_3	1411,89	— +
8_2	1256,24	— —
8_1	1255,45	+ —
8_0	1132,10	+ +
8_{-1}	1123,11	+ +
8_{-2}	1052,92	— —
8_{-3}	1006,38	+ —
8_{-4}	983,22	+ +
8_{-5}	885,84	— +
8_{-6}	883,12	— —
8_{-7}	744,31	+ —
8_{-8}	744,24	+ +
9_9	2226,41	+ —
9_8	2226,41	— —
9_7	2010,67	— +
9_6	2010,67	+ +
9_5	1811,18	+ —
9_4	1811,18	— —
9_3	1631,95	— +
9_2	1631,81	+ +
9_1	1477,78	+ —
9_0	1475,46	— —
9_{-1}	1360,85	— +
9_{-2}	1340,98	+ +
9_{-3}	1283,29	+ —
9_{-4}	1216,62	— —
9_{-5}	1202,28	— +
9_{-6}	1080,72	+ +
9_{-7}	1079,41	+ —
9_{-8}	920,41	— —
9_{-9}	920,41	— +
10_{10}	2703,28	+ +
10_9	2703,28	— +
10_8	2472,44	— —
10_7	2472,44	+ —
10_6	2255,08	+ +
10_5	2255,08	— +
10_4	2055,04	— —
10_3	2055,04	+ —
10_2	1876,16	+ +
10_1	1875,68	— +
10_0	1726,23	— —
10_{-1}	1719,75	+ +
10_{-2}	1614,43	+ +
10_{-3}	1521,88	— +
10_{-4}	1538,65	— —
10_{-5}	1446,68	+ —
10_{-6}	1438,50	+ +
10_{-7}	1294,07	— +
10_{-8}	1293,49	— —
10_{-9}	1114,91	+ —
10_{-10}	1114,91	+ +
11_{11}	3218,55	+ —
11_{10}	3218,55	— —
11_9	2974,88	— +
11_8	2974,88	+ +
11_7	2741,42	+ —
11_6	2741,42	— —
11_5	2523,08	— +
11_4	2523,08	+ +
11_3	2322,82	+ —
11_2	2322,77	— —
11_1	2145,17	— +
11_0	2144,06	+ +
11_{-1}	2000,71	+ —
11_{-2}	1984,20	— —
11_{-3}	1898,56	— +
11_{-4}	1840,14	+ +
11_{-5}	1811,21	+ —
11_{-6}	1694,71	— —
11_{-7}	1691,13	— +
11_{-8}	1525,65	+ +
11_{-9}	1525,36	+ —
11_{-10}	1327,58	— —
11_{-11}	1327,58	— +

à J_{-J}, pour les valeurs de J allant de 0 à 11. Nous avons utilisé les valeurs des moments d'inertie indiquées par Darling et Dennison [7]. Les résultats de ces calculs pour $J = 1, 2, \ldots, 6$, diffèrent de ceux de Nielsen, et ceci d'autant plus que J est plus grand. Cet écart doit être attribué au fait que, dans les formules (1′), (2′), (3′) et (4′), il n'est pas tenu compte de la force centrifuge. La correction nécessaire a été faite, en admettant que, pour un niveau quelconque de vibration-rotation, la différence entre le niveau calculé et le niveau exact est la même qu'entre le niveau correspondant de rotation pure calculé et le niveau observé par Randall et ses collaborateurs dans le travail cité plus haut. Il suffit donc d'ajouter aux valeurs calculées au moyen des formules (1′), (2′), (3) et (4′) la différence en question.

L'accord entre les résultats de cette méthode et ceux de Nielsen pour les six premières valeurs de J donne à penser qu'elle reste encore valable pour des valeurs de J plus élevées.

Le tableau I donne les valeurs des niveaux de rotation pure donnés par Randall, Dennison, Ginskurg et Weber, et le tableau II les divers sous-niveaux des états de vibration ν_1 (1, 0, 0), et ν_3 (0, 0, 1) Par soustraction, on obtient les fréquences des

TABLEAU II.

J.	ν_1 (cm^{-1}).	ν_3 (cm^{-1}).
0_0	3652,7 + +	3756,8 + +
1_1	3694,5 + −	3797,3 + −
1_0	3689,8 − −	3792,1 − −
1_{-1}	3677,0 − +	3779,8 − +
2_2	3780,6 + +	3887,2 + +
2_1	3779,4 − +	3886,2 − +
2_0	3740,7 − −	3850,2 − −
2_{-1}	3726,3 + −	3833,8 + −
2_{-2}	3717,5 + +	3826,2 + +
3_3	3933,4 + −	4027,1 + −
3_2	3931,8 − −	4027,1 − −
3_1	3858,3 − +	3963,8 − +
3_0	3852,3 + +	3957,2 + +
3_{-1}	3820,2 + −	3927,4 + −
3_{-2}	3789,9 − −	3896,1 − −
3_{-3}	3786,5 − +	3891,7 − +
4_4	4127,1 + +	4215,4 + +
4_3	4127,1 − +	4215,0 − +
4_2	4028,2 − −	4113,2 − −
4_1	4023,1 + −	4112,0 + −
4_0	3961,2 + +	4066,8 + +
4_{-1}	3952,1 − +	4051,2 − +
4_{-2}	3921,9 − −	4028,4 − −
4_{-3}	3873,2 + −	3978,0 + −
4_{-4}	3871,1 + +	3975,5 + +
5_5	– + −	4463,4 + −
5_4	– − −	4463,4 − −
5_3	– − +	4345,9 − +
5_2	4242,4 + +	4345,9 + −
5_1	4141,6 + −	4249,7 + −

J.	ν_1 (cm^{-1}).	ν_3 (cm^{-1}).
5_0	4132,1 − −	4235,1 − −
5_{-1}	4075,5 − +	4180,4 − +
5_{-2}	4054,2 + +	4165,9 + +
5_{-3}	4035,2	4150,7 + −
5_{-4}	3968,2 − −	4082,4 − −
5_{-5}	3966,5 − +	4080,9 − +
6_6	4674,9 + +	4750,9 + +
6_5	4674,9 − +	4750,9 − +
6_4	4524,3 − −	4604,5 − −
6_3	4523,5 + −	4604,5 + −
6_2	4394,5 + +	4492,2 + +
6_1	4390,7 − +	4480,5 − +
6_0	4293,8 − −	4395,2 − −
6_{-1}	4288,7 + −	4385,7 + −
6_{-2}	4239,5 + +	4338,6 + +
6_{-3}	4201,8 − +	4301,4 − +
6_{-4}	4191,1 − −	4297,4 − −
6_{-5}	4096,5 + −	4196,8 + −
6_{-6}	4096,5 + +	4196,2 + +
7_7	5016,5 + −	5087,5 + −
7_6	5016,5 − −	5087,5 − −
7_5	4825,5 − +	4925 − +
7_4	4825,5 + +	4925 + +
....	....	....
7_{-4}	4349,4 + +	4453,2 + +
7_{-5}	4349,4 + −	4453,2 + +
7_{-6}	4227,8 − −	4334,6 − −
7_{-7}	4227,8 − +	4334,6 − +
8_8	5402,3 + +	5462,4 + +
8_7	5402,3 − +	5462,4 − +
8_6	5208,1 − −	5282,6 − −
8_5	5208,1 + −	5282,6 + −

J.	ν_1 (cm^{-1}).	ν_3 (cm^{-1}).
....	....	....
8_{-5}	4523,6 − +	4827,7 − +
8_{-6}	4523,6 − −	4827,7 − −
8_{-7}	4379,7 + −	4490,1 + −
8_{-8}	4379,7 + +	4490,1 + +
9_9	5827,8 + −	5876,8 + −
9_8	5827,8 − −	5876,8 − −
9_7	5618,1 − +	5681,7 − +
9_6	5618,1 + +	5681,7 + +
....	....	....
9_{-6}	4715,6 + +	4820,2 + +
9_{-7}	4715,6 + −	4820,2 + −
9_{-8}	4555,2 − −	4663,6 − −
9_{-9}	4555,2 − +	4663,6 − +
10_{10}	6301,9 + +	6328,8 + +
10_9	6301,9 − +	6328,8 − +
10_8	6068,8 − −	6121,4 − −
10_7	6068,8 + −	6121,4 + −
....	....	....
10_{-7}	4925,5 − +	5030,6 − +
10_{-8}	4925,5 − −	5030,6 − −
10_{-9}	4745,9 + −	4855,2 + −
10_{-10} ...	4745,9 + +	4855,2 + +
11_{11}	6795,2 + −	6816,6 + −
11_{10}	6795,2 − −	6816,6 − −
11_9	6538,9 − +	6593,0 − +
11_8	6538,9 + +	6593,0 + +
....	....	....
11_{-8}	5253,2 + +	5316,4 + +
11_{-9}	5253,1 + −	5316,4 + −
11_{-10} ...	4954,0 − −	5064,9 − −
11_{-11} ...	4954,0 − +	5064,9 − +

De $J = 0$ à $J = 6$, les niveaux d'énergie indiqués sont ceux calculés par Nielsen.

composantes des bandes ν_1 [(1, 0, 0) — (0, 0, 0, 1] et ν_3 [0, 0, 1) — 10, 0, 0)]. La règle de sélection bien connue n'autorise que les transitions pour lesquelles $\Delta J = 0$ et $\Delta J = \pm 1$. Mais les transitions entre des sous-niveaux quelconques de deux niveaux de vibration-rotation (v'_1, v'_2, v'_3, J' et v''_1, v''_2, v''_3, J'') donnés ne sont pas toutes permises. Chaque sous-niveau peut-être affecté d'un double signe (*cf.* Herzberg) qui rend compte de ses propriétés de symétrie, et Dennison [22] a montré que seules sont permises les transitions symbolisées par

$$\left.\begin{array}{ccc} + + & \leftrightarrow & - - \\ + - & \leftrightarrow & - + \end{array}\right\} \text{pour } \nu_1$$

et par

$$\left.\begin{array}{ccc} + + & \leftrightarrow & - + \\ + - & \leftrightarrow & - - \end{array}\right\} \text{pour } \nu_2.$$

La comparaison avec les fréquences expérimentales est indiquée tableau III. Les fréquences marquées d'un astérisque sont celles relatives à la bande ν_1.

Bande $\nu_2 + \nu_3$ à 1,87 μ. — Un travail analogue a été fait pour cette bande. Le tableau IV indique les valeurs des énergies des sous-niveaux, de $J = 1$ à $J = 11$. Les fréquences calculées et les fréquences observées de cette bande sont rassemblées dans le tableau V [183 bandes de vibration-rotation ont été observées pour cette bande de 5 151,4 à 5 556,2 cm^{-1} (*fig.* 2)]. Les transitions permises pour cette bande sont symbolisées par

$$\left.\begin{array}{ccc} + + & \leftrightarrow & - + \\ + - & \leftrightarrow & - - \end{array}\right\} \nu_2 + \nu_3.$$

TABLEAU III.

	ν (cm⁻¹) observées.	ν (cm⁻¹) calculées.	Transitions.
1.....	3952	3951,2	10_{-8} — 9_{-7}
	–	3950	11_{-11} — 10_{-10}
	–	3950	11_{-10} — 10_{-9}
2.....	3949,8	3949,8	10_{-7} — 9_{-6}
3.....	3948,1	–	–
	–	3947,7	3_2 — 2_{-1}
4.....	3945,5		
5.....	3943,3	–	–
	–	3942,4*	7_4 — 8_{-5}
6.....	3941,2	–	–
7.....	3939,2	–	–
	–	3937,2*	6_3 — 7_{-7}
	–	3937,1	10_{-9} — 9_{-8}
8.....	3936,7	3936,6*	7_5 — 6_{-3}
	–	3936,6*	7_4 — 6_4
9.....	3934,9	3934,8	10_{-10} — 9_{-9}
	–	3934,4	9_{-6} — 8_{-5}
10.....	3933,0	–	–
11.....	3931,5	3932,1	3_3 — 2_0
	–	3930,1	4_0 — 3_{-3}
12.....	3229,4	3929,9	5_{+3} — 5_{-2}
13.....	3928,6	–	–
14.....	3926,4	–	–
15.....	3925,7	–	–
16.....	3924,4	–	–
17.....	3922,7	–	–
18.....	3921	3921,5*	6_4 — 6_{-2}
		3920,6	5_5 — 6_{-4}
	–	3919,4	9_{-9} — 8_{-8}
19.....	3918,9	3919,3	9_{-8} — 8_{-7}
20.....	3917,3	–	–
21.....	3916,1	3915,7	10_{-7} — 10_{-10}
	–	3915,7	10_{-8} — 10_{-9}
22.....	3913,5	3913,0*	6_{-2} — 5_{-4}
23.....	3911,6	–	–
	–	3910,4	7_{-5} — 6_{-4}
24.....	3909,7	–	–
25.....	3908	–	–
26.....	3906,3	3905,9	6_2 — 7_{-7}
27.....	3904,5	–	–
	–	3903,8	8_{-8} — 7_{-7}
	–	3903,5	8_{-7} — 7_{-6}
28.....	3902,8	3902,4	4_3 — 4_3
29.....	3900,9	3900,4	7_{-4} — 6_{-3}
	–	3900,1	6_4 — 7_{-5}
	–	3899,8	9_{-6} — 9_{-9}
	–	3899,8	9_{-7} — 9_{-8}
	–	3899,4	5_2 — 5_{-1}
30.....	3898,9	3899,2	5_3 — 6_{-6}
31.....	3897,3	–	–
32.....	3894,6	–	–
33.....	3892,6	3892,1	6_{-2} — 5_{-1}
34.....	3890,7	–	–
	–	3889,7	11_8 — 10_9
	–	3889,7	11_{-8} — 10_{-7}
35.....	3888,2	3887,9	7_{-7} — 6_{-6}
	–	3887,4	7_{-6} — 6_{-5}
36.....	3886,3	3886,4*	4_1 — 3_{-3}
37.....	3884,1	–	–
38.....	3881,9	3881,8	6_2 — 5_3
	–	3881,8	6_{-1} — 5_0
	–	3881,8*	6_1 — 5_1
39.....	3880,6	–	–
	–	3879,7	7_4 — 6_5
	–	3879,7	7_5 — 6_6
40.....	3878,6	–	–
41.....	3876,5	–	–
	–	3875,5	5_{-3} — 4_{-2}
42.....	3874,5	–	–
43.....	3872,7	–	–
44.....	3871,2	3871	6_{-6} — 5_{-5}
	–	3870,7	–
	–	3870,3	6_{-5} — 5_{-4}
45.....	3869,6	–	–
46.....	3866,7	3866,8	7_{-4} — 7_{-7}
	–	3866,8	7_{-5} — 7_{-5}
	–	3865,8	5_1 — 4_2
	–	3865,6	5_{-2} — 4_{-1}
47.....	3863,6	3863,4	2_2 — 1_1
48.....	3862,6	–	–
49.....	3859,8	–	–
	–	3859,0	5_{-5} — 4_{-4}
50.....	3858,3	3858,1*	6_6 — 7_{-2}
	–	3857,7	5_{-4} — 3_{-3}
	–	3857,7	5_2 — 4_3
	–	3857,7	5_3 — 4_4
51.....	3856,6	–	–
	–	3855,1	4_{-2} — 3_{-1}
52.....	3854,7	3854,7	6_{-3} — 6_{-6}
	–	3854,7	4_0 — 3_1
	–	3853,8	–
53.....	3852,8	3852,6	5_0 — 4_1
54.....	3851,3	3850,8*	5_{-1} — 4_{-3}
	–	3850,2	6_{-4} — 6_{-5}
55.....	3849,4	–	–
56.....	3846,6	3846,1*	10_{-7} — 9_{-7}
57.....	3844,8	3844,8	4_{-1} — 3_0
	–	3844,9*	10_{-8} — 9_{-6}
58.....	3843,2	–	–
	–	3842,2*	6_{-1} — 5_{-1}
59.....	3841,7	3841,8*	4_4 — 3_2
	–	3841,6*	4_3 — 3_3
	–	3841,3*	5_1 — 4_{-1}

TABLEAU III (*suite*).

	ν (cm⁻¹) observées.	ν (cm⁻¹) calculées.	Transitions.
60.....	3840,2	3840,7	$5_{-2} - 5_{-5}$
	–	3839,1*	$11_{-11} - 10_{-9}$
	–	3839,1*	$11_{-10} - 10_{-10}$
61.....	3838,3	3838,8	$4_{-4} - 3_{-3}$
	–	3835,8	$4_{-3} - 3_{-2}$
	–	3835,6	$5_{0} - 5_{-3}$
62.....	3834,9	–	–
63.....	3833,3	–	–
	–	3832,5*	$9_{-6} - 8_{-6}$
	–	3832,4	$3_{-1} - 2_{0}$
	–	3832,2*	$6_{5} - 7_{-1}$
64.....	3831,5	–	–
	–	3829,8*	$9_{-7} - 8_{-5}$
65.....	3829,1	3829,4*	$10_{10} - 10_{8}$
	–	3829,4*	$10_{4} - 10_{7}$
66.....	3828,3	3828,3*	$9_{6} - 8_{7}$
	–	3828,3*	$9_{7} - 8_{8}$
	–	3827,7	$3_{1} - 2_{2}$
	–	3826,7	$4_{1} - 3_{2}$
67.....	3825,8	3825,5*	$10_{-9} - 9_{-9}$
	–	3825,5*	$10_{-10} - 9_{-8}$
68.....	3824,1	3824,2	$5_{-3} - 5_{-4}$
	–	3823,0	$6_{5} - 7_{0}$
69.....	3822,1	3822,4	$3_{0} - 2_{1}$
	–	3821,9*	$4_{2} - 3_{0}$
	–	3821,7	$3_{-3} - 2_{-2}$
70.....	3820,4	3820,5	$3_{0} - 3_{-3}$
	–	3819,4	$6_{6} - 7_{1}$
	–	3819,2*	$8_{-5} - 7_{-5}$
	–	3819,0*	$4_{0} - 3_{-2}$
71.....	3818,6	–	–
72.....	3817,5	3817,1*	$9_{8} - 9_{6}$
	–	3817,1*	$9_{9} - 9_{7}$
	–	3816,7	$3_{-2} - 2_{-1}$
	–	3816,4*	$5_{1} - 5_{-5}$
	–	3816,4*	$5_{0} - 4_{0}$
73.....	3815,6	3816,2	$2_{1} - 2_{-2}$
	–	3814,8*	$6_{4} - 7_{-4}$
74.....	3813,8	3814,1	$8_{-6} - 7_{-4}$
	–	3812,8*	$8_{5} - 7_{6}$
	–	3812,8*	$8_{6} - 7_{7}$
75.....	3811,4	3811 *	$9_{-9} - 8_{-8}$
	–	3810,9*	$9_{-9} - 8_{-7}$
	–	3810,8*	$8_{7} - 8_{5}$
	–	3810,6*	$10_{-7} - 10_{-9}$
	–	3810,6*	$10_{-8} - 10_{-10}$
76.....	3809	–	–
77.....	3807,6	3807,9	$2_{0} - 1_{1}$
78.....	3806,8	3806,6*	$7_{-4} - 6_{-4}$
79.....	3804,7	–	–
	–	3803,7	$4_{-2} - 3_{-3}$
80.....	3802,9	3802,4	$3_{2} - 4_{-3}$
	–	3802,4	$2_{-1} - 1_{-1}$
81.....	3801,2	3801,8	$5_{5} - 6_{0}$
82.....	3799,4	3799,9*	$7_{6} - 7_{4}$
	–	3799,9*	$7_{7} - 7_{5}$
	–	3799,2	$6_{-1} - 7_{-6}$
	–	3799,0	$4_{3} - 5_{-2}$
83.....	3798	3798,6*	$3_{3} - 2_{1}$
	–	3796,7	$2_{-1} - 1_{0}$
	–	3796,7*	$3_{3} - 3_{-3}$
84.....	3796,3	3796,4*	$7_{-5} - 6_{-3}$
85.....	3794,8	3795,2*	$9_{-6} - 9_{-8}$
	–	3795,2*	$9_{-7} - 9_{-9}$
	–	3793,4*	$8_{-7} - 7_{-7}$
86.....	3792,8	3793,1*	$8_{-8} - 7_{-6}$
	–	3791,5	$7_{-5} - 6_{0}$
87.....	3790,2	–	–
88.....	3786,9	–	–
	–	3786,0*	$6_{5} - 6_{3}$
	–	3786,0*	$6_{6} - 6_{4}$
	–	3785,7	$8_{-6} - 7_{-5}$
	–	3785,6	$6_{-2} - 6_{-3}$
	–	3785,5	$4_{+1} - 5_{-4}$
	–	3785,2	$3_{-1} - 3_{-2}$
89.....	3784,1	–	–
90.....	3782,2	–	–
	–	3781,1*	$7_{-6} - 6_{-6}$
91.....	3780,3	3780,6*	$7_{-7} - 6_{-5}$
	–	3779,8	$1_{-1} - 0_{0}$
	–	3779,4*	$8_{-6} - 8_{-8}$
	–	3779,3*	$8_{-5} - 8_{-7}$
	–	3779,0*	$5_{-2} - 4_{-2}$*
	–	3778,9*	$3_{1} - 2_{-1}$
	–	3778,8*	$4_{-1} - 3_{-1}$
92.....	3778,1	–	–
93.....	3776,2	–	–
94.....	3772,9	–	–
95.....	3770,9	3771,3*	$6_{-5} - 5_{-5}$
	–	3771	$6_{1} - 7_{-4}$
	–	3770,8	$2_{0} - 2_{-1}$
	–	3770,4	$5_{-1} - 5_{-2}$
96.....	3769,5	3770,0*	$6_{-6} - 5_{-4}$
97.....	3767,9	–	–
	–	3766,8	$5_{-3} - 4_{2}$
	–	3766,6*	$6_{3} - 6_{1}$
	–	3766,5*	$6_{4} - 6_{2}$
98.....	3765,6	–	–
99.....	3763,9	–	–
	–	3763,0*	–
	–	3762,8*	–
100.....	3761,7	–	–
101.....	3760,6	3760,2	$1_{1} - 1_{0}$
102.....	3757,8	3757,5	$3_{1} - 3_{0}$
	–	3757,3*	$3_{0} - 2_{0}$
103.....	3755,6	–	–

TABLEAU III (*suite*).

	ν (cm⁻¹)		
	observées.	calculées.	Transitions.
104.....	3754,2	–	–
	–	3752,4	2_{2} — 2_{1}
	–	3752,3	6_{-2} — 7_{-7}
105.....	3751,7	3751,9	3_{3} — 4_{-2}
	–	3750,5	2_{2} — 3_{3}
	–	3750,1	2_{1} — 2_{2}
	–	3749,8	1_{0} — 1_{1}
106.....	3749,4	3749,7	6_{-6} — 5_{-1}
107.....	3748,2	3748,3	8_{-6} — 9_{-7}
	–	3747,0	8_{-5} — 9_{-6}
	–	3746,3*	5_{-4} — 4_{-4}
108.....	3746,1	3746,1	6_{0} — 6_{-1}
	–	3745,8	5_{1} — 5_{0}
109.....	3745,5	3745,4*	6_{-4} — 6_{-6}
	–	3745,1	3_{0} — 3_{1}
	–	3744,6*	4_{3} — 4_{1}
110.....	3743,8	3743,5*	2_{2} — 1_{0}
	–	3743,2*	4_{4} — 4_{2}
	–	3743,1	5_{3} — 6_{-2}
	–	3742,9	4_{-2} — 3_{3}
111.....	3742,2	3741,9	3_{1} — 4_{-4}
	–	3741,8	3_{3} — 3_{2}
	–	3741,8*	5_{-5} — 4_{-3}
	–	3741,6	3_{2} — 3_{3}
	–	3741,6*	6_{1} — 6_{-1}
112.....	3740,6	3741,5	4_{0} — 5_{-5}
113.....	3738,9	3738,8	2_{-1} — 2_{0}
114.....	3737,2	3737,1*	2_{1} — 1_{1}
	–	3736,5*	4_{-3} — 3_{-3}
	–	3735,7	5_{3} — 5_{2}
	–	3735,7	6_{-1} — 6_{-3}
	–	3735,5	4_{-1} — 4_{0}
	–	3735,5	5_{2} — 5_{3}
115.....	3735,1	3735,3	6_{2} — 6_{1}
	–	3734,9	5_{-3} — 4_{-1}
116.....	3733,1	3733	0_{0} — 1_{-1}
	–	3732,9*	6_{2} — 6_{0}
117.....	3731,2	3731,8	7_{-7} — 6_{-2}
	–	3730,6	4_{2} — 4_{1}
118.....	3729,2	3728,9*	4_{-4} — 3_{-2}
119.....	3727,7	3727,6*	4_{3} — 5_{-3}
	–	3727,4*	4_{-1} — 4_{-3}
	–	3727,2	4_{4} — 4_{3}
	–	3726,8	4_{3} — 4_{4}
120.....	3726,3	3726,2	5_{0} — 5_{1}
	–	3725,5*	3_{2} — 3_{0}
121.....	3724,8	–	–
	–	3722,8*	4_{1} — 4_{-1}
	–	3722,8	3_{-2} — 3_{-1}
122.....	3722,2	3722,7	6_{1} — 6_{2}
	–	3721,3*	3_{3} — 3_{1}
123.....	3720,6	3721,1	5_{4} — 5_{5}
	–	3721,1	5_{5} — 5_{4}
	–	3719,9*	3_{-2} — 2_{-2}
124.....	3719,3	3719,4	5_{-2} — 5_{-1}
125.....	3717,2	–	–
126.....	3716,0	3716,1*	5_{0} — 5_{-2}
	–	3715,6	6_{4} — 6_{3}
	–	3715,6	6_{3} — 6_{4}
	–	3715,6*	4_{-2} — 3_{0}
127.....	3714,1	–	–
	–	3712,7	1_{0} — 2_{-1}
	–	3712,5*	4_{2} — 4_{0}
128.....	3711,4	–	–
129.....	3710,1	3710,1*	3_{0} — 3_{-2}
	–	3710,0*	5_{-3} — 5_{-5}
	–	3709,9*	3_{2} — 4_{-4}
	–	3709,8	1_{-1} — 2_{-2}
130.....	3708,4	3708,4	7_{4} — 7_{5}
	–	3708,4	7_{5} — 7_{4}
	–	3707,1*	3_{-3} — 2_{-1}
131.....	3706,8	3706,9	5_{1} — 6_{-4}
132.....	3705,7	3705,6	6_{5} — 6_{6}
	–	3705,6	6_{6} — 6_{5}
133.....	3704	–	–
134.....	3702,6	3702,8	4_{-3} — 4_{-2}
	–	3702,5*	2_{-1} — 1_{-1}
	–	3702,4*	6_{-1} — 7_{-7}
	–	3702,3	1_{1} — 2_{0}
135.....	3701,1	–	–
	–	3700,0*	4_{-2} — 4_{-4}
	–	3700,0*	2_{1} — 2_{-1}
136.....	3699,6	3699,0	5_{-4} — 4_{1}
	–	3699,3	7_{6} — 7_{7}
	–	3699,3	7_{7} — 7_{6}
	–	3698,6	6_{-3} — 6_{-2}
137.....	3698,3	3698,2	5_{-1} — 4_{4}
138.....	3697,8	3697,9*	4_{1} — 5_{-5}
139.....	3696,2	3696,7*	6_{-2} — 6_{-4}
140.....	3694,7	3695,1	5_{1} — 5_{-1}
	–	3692,7	4_{-3} — 3_{2}
141.....	3692	–	–
	–	3691,6	2_{-1} — 3_{-2}
	–	3691,4	2_{-2} — 2_{1}
142.....	3690,8	3691,1	8_{5} — 8_{6}
	–	3691,1	8_{6} — 8_{5}
	–	3689,8*	1_{0} — 0_{0}
143.....	3689	3689,5	2_{-2} — 3_{-3}
	–	3687,7*	7_{-4} — 6_{0}
144.....	3686,3	3686,3*	6_{1} — 7_{-5}
	–	3686,0*	4_{0} — 4_{-2}
	–	3685,6*	2_{2} — 2_{0}
	–	3685,5	7_{-6} — 6_{-1}
	–	3685,4	3_{-1} — 2_{1}
	–	3685,4*	5_{0} — 6_{-6}
	–	3685,4	3_{-3} — 3_{0}
	–	3685,0*	3_{1} — 3_{-1}
	–	3683,6*	6_{0} — 5_{2}

TABLEAU III (*suite*),

	ν (cm⁻¹) observées.	ν (cm⁻¹) calculées.	Transitions.
145.....	3683,3	3683,5*	3_{-1} — 3_{-3}
	–	3682,9	5_{-4} — 5_{-3}
146.....	3681,5	–	–
	–	3680,4*	2_{-2} — 1_0
147.....	3679,7	3679,9	2_1 — 3_0
148.....	3677,5	8677,7	5_{-2} — 4_3
	–	3676,9	2_0 — 3_{-1}
	–	3676,0*	5_{-1} — 5_{-3}
	–	3675,9*	4_0 — 3_2
149.....	3675,2	3675,2	4_{-4} — 4_{-1}
	–	3675,1	2_2 — 3
150.....	3673,7	–	–
	–	3672,7	8_8 — 8_7
	–	3672,7	8_7 — 8_8
151.....	3671,5	3671,4	3_{-2} — 4_{-3}
	–	3671,0	9_7 — 9_6
	–	3671,0	9_6 — 9_7
	–	3670,7*	1_1 — 1_{-1}
	–	3670,3*	5_{-2} — 4_2
152.....	3669,7	3669,8	3_{-3} — 4_{-4}
153.....	3667,2	–	–
154.....	3665,3	–	–
155.....	3664,1	–	–
156.....	3662,3	–	–
157.....	3659,2	–	–
158.....	3657,3	3656,9	3_0 — 4_{-1}
	–	3656,8	4_1 — 5_0
159.....	3655,4	–	–
	–	3654,0	6_{-5} — 6_{-4}
160.....	3653,6	3653,8*	3_{-2} — 2_2
	–	3653,4*	5_1 — 4_3
	–	3653,0*	6_{-2} — 7_{-5}
	–	3652,9	6_0 — 5_5
161.....	3652,0	3652,2*	6_2 — 5_4
	–	3652,2	3_{-1} — 4_{-2}
162.....	3651	3651,5	4_{-3} — 5_{-4}
	–	3650,4	9_9 — 9_8
	–	3650,4	9_8 — 9_9
	–	3650,3	4_{-4} — 5_{-5}
	–	3650,0*	6_{-5} — 5_{-1}
	–	3648,9	10_7 — 10_8
	–	3648,9	10_8 — 10_7
	–	3648,3	6_{-4} — 6_{-1}
163.....	3647,8	3648,1	3_1 — 4_0
164.....	3645,7	–	–
	–	3643,9*	5_0 — 5_4
	–	3643,7	1_{-1} — 2_2
	–	3643,2	3_2 — 4_2
	–	3643,2	6_{-6} — 6_3
165.....	3642,3	–	–
166.....	3640,4	–	–
167.....	3638,4	3638,4*	2_2 — 3_{-2}
168.....	3635,8	3635,2	4_{-1} — 5_{-2}
	–	3635,2	5_{-4} — 6_{-5}
	–	3634,7*	1_{-1} — 1_1
	–	3634,7*	4_0 — 5_{-4}
	–	3634,2*	5_{-5} — 6_{-6}
169.....	3632,7	–	–
170.....	3631	–	–
	–	3630,2	7_{-6} — 7_{-5}
171.....	3629,3	–	–
	–	3628,7*	4_2 — 5_{-3}
172.....	3626,2	–	–
	–	3625,5	10_9 — 10_{10}
	–	3625,5	10_{10} — 10_9
	–	3625	7_{-7} — 7_{-4}
	–	3625	7_{-6} — 6_{-2}
173.....	3624	3623,2*	4_4 — 5_0
174.....	3622,6	3622,5*	2_{-2} — 2_0
175.....	3621	–	–
	–	3620,3	4_0 — 5_{-1}
176.....	3619,3	3617,8*	1_0 — 2_{-2}
	–	3618,2*	4_3 — 5_1
	–	3618,1	11_8 — 11_9
	–	3618,1	11_9 — 11_8
177.....	3617	–	–
	–	3616,1*	3_2 — 4_0
178.....	3615,1	3615,6*	0_0 — 1_0
179.....	3614,2	3614,1	2_{-2} — 3_1
	–	3613,2*	3_{-3} — 3_{-1}
	–	3612,9	5_{-2} — 6_{-3}
180.....	3612,1	–	–
	–	3611,1	8_{-5} — 7_4
181.....	3610,7	3610,6	3_{-2} — 3_3
	–	3610,3	6_{-5} — 7_{-6}
	–	3610,3	6_{-6} — 7_{-5}
	–	3609,9	6_{-6} — 7_{-7}
182.....	3608,2	3608,1*	3_{-1} — 3_1
	–	3607,9	5_{-3} — 6_{-4}
	–	3607	8_{-7} — 8_{-6}
183.....	3606,9	–	–
	–	3606,2*	4_{-2} — 4_0
184.....	3605,2	3605	4_4 — 5_3
	–	3604,8	4_3 — 5_2
	–	3604,3	4_2 — 5_1
	–	3604,2	8_{-8} — 8_{-5}
185.....	3602,8	–	–
186.....	3601,6	–	–
	–	3598	11_{10} — 11_{11}
	–	3589	11_{11} — 11_{10}

TABLEAU IV.

J.	ν (cm^{-1}).		
0_0	5333,5	+	+
1_1	5377,0	+	−
1_0	5371,4	−	−
1_{-1}	5356,7	−	+
2_2	5471,8	+	+
2_1	5469,5	−	+
2_0	5430,2	−	−
2_{-1}	5413,1	+	−
2_{-2}	5402,6	+	+
3_3	5630,6	+	−
3_2	5630,6	−	−
3_1	5547,9	−	+
3_0	5540,7	+	+
3_{-1}	5507,2	+	−
3_{-2}	5475,2	−	−
3_{-3}	5469,6	−	+
4_4	5483,9	+	+
4_3	5483,8	−	+
4_2	5727,9	+	−
4_1	5727,9	+	−
4_0	5655,2	+	+
4_{-1}	5636,1	−	+
4_{-2}	5610,1	−	−
4_{-3}	−	+	−
4_{-4}	5550,2	+	+
5_5	6108,7	+	−
5_4	6108,0	−	−
5_3	5959,9	−	+
5_2	5959,8	+	+
5_1	5850,4	+	−

J.	ν (cm^{-1}).		
5_0	5847,2	−	−
5_{-1}	5780,0	−	+
5_{-2}	5752,2	+	+
5_{-3}	5724,4	+	−
5_{-4}	5655,6	−	−
5_{-5}	5653,9	−	+
6_6	6430,8	+	+
6_5	6430,8	−	+
6_4	6244,6	−	−
6_3	6244,6	+	−
6_2	6100,8	+	+
6_1	6098,6	−	+
6_0	5978,6	−	−
6_{-1}	5928,5	+	−
6_{-2}	5918,8	+	+
6_{-3}	5866,3	−	+
6_{-4}	5856,6	−	−
6_{-5}	5732,1	+	−
6_{-6}	5730,1	+	+
7_7	6798,2	+	−
7_6	6798,2	−	−
7_5	6602,8	−	+
7_4	6602,8	+	+
....	......	.....	
7_{-4}	6081,0	+	+
7_{-5}	6081,0	+	−
7_{-6}	5883,6	−	−
7_{-7}	5883,6	−	+
8_8	7218,4	+	+
8_7	7218,4	−	+
8_6	6996,8	−	−
8_5	6996,8	+	−

J.	ν (cm^{-1}).		
....	......	.....	
8_{-5}	6259,0	−	+
8_{-6}	6259,0	−	−
8_{-7}	6029,9	+	−
8_{-8}	6029,9	+	+
9_9	7680,4	+	−
9_8	7680,4	−	−
9_7	7425,2	−	+
9_6	7425,2	+	+
....	......	.....	
9_{-6}	6665,0	+	+
9_{-7}	6665,0	+	−
9_{-8}	6197,8	−	−
9_{-9}	6197,8	−	+
10_{10}	8185,6	+	+
10_9	8185,6	−	+
10_8	7925,2	−	−
10_7	7925,2	+	−
....	......	.....	
10_{-7}	6667,4	−	+
10_{-8}	6667,4	−	−
10_{-9}	6381,6	+	−
10_{-10}	6381,6	+	+
11_{11}	8732,2	+	−
11_{10}	8732,2	−	−
11_9	8455,9	−	+
11_8	8455,9	+	+
....	......	.....	
11_{-8}	6906,0	+	+
11_{-9}	6906,0	+	−
11_{-10}	6587,9	−	−
11_{-11}	6587,9	−	+

De $J = 0$ à $J = 6$, les niveaux d'énergie indiqués sont ceux calculés par Nielsen.

Détermination de certaines constantes de la molécule. — La détermination du centre des bandes fournit une valeur expérimentale des fréquences de vibration de ces bandes.

Pour $\nu_1 + \nu_3$, le centre apparaît visiblement sur le spectre entre les bandes 88 et 89 et se situe sensiblement à 5 334 cm^{-1}. Pour ν_1 et ν_3, les centres sont beaucoup plus difficiles à situer du fait du recouvrement des deux bandes, et je ne les ai pas déterminés.

Les constantes de rotation A, B, C, de la molécule, ou les moments d'inertie I_A, I_B, I_C, ont été redéterminés, pour chacun des trois états de vibration-rotation envisagés, à partir des niveaux de nombre quantique total 1 et 2, compte tenu de la correction de force centrifuge (faible pour ces niveaux) proposée par Dennison

$$4A = \frac{h}{2\pi^2 c I_A} = (2_1 - 1_{-1}) \text{ exp} + 0{,}28,$$

$$4B = \frac{h}{2\pi^2 c I_B} = (2_0 - 1_0) \text{ exp} + 0{,}03,$$

$$4C = \frac{h}{2\pi^2 c I_C} = (2_{-1} - 1_1) \text{ exp} + 0{,}03;$$

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-27}, \qquad c = 2{,}99776 \cdot 10^{10}.$$

A partir de ces valeurs de I_A, I_B et I_C, on peut calculer, pour chacun des états vibratoires envisagés, l'angle $\widehat{HOH} = \alpha$ de la molécule, et la distance $OH = r$.

$$\frac{I_B}{I_A} = 1{,}125 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$I_C = 2 H r^2 \left(1 - \frac{1}{9} \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$H = \frac{m_H}{N} = \frac{1{,}008}{6{,}02 \cdot 10^{23}}.$$

TABLEAU V.

	ν (cm⁻¹) observées.	ν (cm⁻¹) calculées.	Transitions.
1.....	5151,4	–	–
	–	5152,2	6_{-4} — 7_{-5}
2.....	5153,6	–	–
3.....	5154,9	–	–
	–	5156,8	6_{-3} — 7_{-4}
4.....	5158,6	–	–
5.....	5161	–	–
6.....	5162,6	–	–
7.....	5164,8	–	–
8.....	5166,1	5165,7	5_{-5} — 4_{4}
9.....	5168,0	–	–
	–	5174,1	7_{-7} — 7_{-4}
10.....	5174,9	–	–
	–	5177,1	6_{-6} — 6_{-3}
	–	5177,2	5_{-1} — 6_{-2}
	–	5178,3	8_{-5} — 9_{-5}
	–	5179,2	7_{-6} — 7_{-5}
11.....	5179,7	5179,6	8_{-6} — 9_{-7}
12.....	5181,3	5181,6	5_{-3} — 6_{-4}
13.....	5183,2	–	–
14.....	5184,8	–	–
15.....	5186,2	–	–
16.....	5188,9	5188,8	5_{1} — 6_{0}
	–	5189,3	6_{-5} — 6_{-4}
	–	5192,1	7_{-5} — 6_{4}
17.....	5192,9	–	–
18.....	5194,5	–	–
	–	5195,2	7_{-4} — 8_{-5}
19.....	5196,2	–	–
	–	5197,9	7_{-5} — 8_{-6}
	–	5198,1	5_{0} — 6_{-1}
20.....	5198,9	5199,2	5_{-2} — 6_{-3}
21.....	5201,6	–	–
22.....	5202,4	–	–
23.....	5205,1	–	–
24.....	5207,8	5207,2	5_{-5} — 6_{-6}
	–	5208,0	9_{8} — 10_{7}
	–	5208,4	5_{-4} — 6_{-5}
25.....	5208,9	5208,7	4_{0} — 5_{-1}
26.....	5210,5	5210,6	4_{-2} — 5_{-3}
	–	5210,8	10_{9} — 11_{8}
	–	5210,8	10_{10} — 11_{9}
27.....	5211,6	–	–
28.....	5214,0	5214,1	6_{5} — 7_{4}
	–	5214,1	6_{6} — 7_{5}
29.....	5216,8	–	–
30.....	5219,2	5219,0	4_{2} — 5_{1}
	–	5219,7	5_{4} — 6_{3}
	–	5219,8	5_{4} — 6_{4}
	–	5220,1	4_{-1} — 5_{-2}
	–	5220,5	5_{-3} — 5_{0}
	–	5220,6	1_{-1} — 2_{2}

	ν (cm⁻¹) observées.	ν (cm⁻¹) calculées.	Transitions.
31.....	5221,7	–	–
32.....	5223,8	5224,0	4_{1} — 5_{0}
33.....	5225,5	5225,0	4_{-4} — 5_{-5}
34.....	5226,8	–	–
	–	5227,6	4_{-2} — 4_{1}
35.....	5230,1	–	–
36.....	5232,3	5232,0	3_{-1} — 4_{-2}
	–	5232,2	3_{1} — 4_{0}
37.....	5233,4	5233,5	4_{4} — 5_{3}
	–	5233,7	4_{3} — 5_{2}
	–	5234,5	7_{-6} — 6_{-1}
38.....	5236,4	–	–
39.....	5237,8	–	–
40.....	5239,2	–	–
41.....	5240,8	5240,4	3_{0} — 4_{-1}
42.....	5243,6	–	–
43.....	5244,9	–	–
44.....	5246,6	5246,7	3_{3} — 4_{2}
45.....	5248,0	5247,7	3_{-3} — 4_{-4}
	–	5248,1	3_{2} — 4_{1}
46.....	5249,3	5249,9	4_{-4} — 4_{-1}
47.....	5250,4	5250,5	3_{-2} — 4_{-3}
48.....	53,2	–	–
49.....	55,4	–	–
	–	5256,1	5_{-4} — 5_{-3}
	–	5256,9	2_{0} — 3_{-1}
50.....	5257,6	–	–
51.....	5259,6	–	–
52.....	5262,1	–	–
	–	5263,2	2_{1} — 3_{0}
	–	5263,3	3_{-3} — 3_{0}
53.....	5264,3	5264,0	5_{-2} — 4_{3}
	–	5265,9	2_{-2} — 3_{-3}
54.....	5267	–	–
55.....	5268,4	5267,8	2_{-2} — 2_{1}
56.....	5270,0	–	–
	–	5270,9	6_{0} — 7_{-5}
57.....	5272,9	–	–
58.....	5273,7	–	–
59.....	5276,5	–	–
60.....	5278,2	–	–
61.....	5279,3	–	–
	–	5280,8	7_{-7} — 6_{-2}
62.....	5282,1	5282,0	1_{1} — 2_{0}
63.....	5283,5	–	–
64.....	5286	–	–
65.....	5286,8	5286,7	1_{-1} — 2_{-2}
66.....	5288,8	–	–
67.....	5290,7	–	–
	–	5292,0	1_{0} — 2_{-1}
68.....	5293,5	–	–
69.....	5296,3	–	–

Tableau V (*suite*).

	ν (cm⁻¹) observées.	ν (cm⁻¹) calculées.	Transitions.
70	5298,6	–	–
71	5300,5	–	–
72	5301,7	5301,9	3_{-2} — 3_{-1}
73	5304,2	–	–
	–	5305,7	5_{-2} — 5_{-1}
74	5306,4	–	–
75	5308,7	–	–
76	5310,1	5309,7	0_{0} — 1_{-1}
77	5311,8	–	–
78	5312,9	–	–
79	5313,8	–	–
80	5315,5	–	–
81	5317,7	5318,1	2_{-1} — 2_{0}
	–	5318,3	6_{2} — 7_{-3}
82	5319,7	–	–
83	5321,4	–	–
84	5324,5	5325	7_{-4} — 6_{1}
85	5326,2	5326	–
86	5328,7	5328,4	–
	–	5328,6	–
	–	5329,1	–
	–	5329,5	–
87	5330,5	–	–
88	5332,5	5332,5	–
	–	5333,3	5_{-1} — 6_{-5}
89	5335,6	–	–
	–	5337	2_{2} — 2_{1}
90	5338,2	5338,1	4_{-4} — 3_{1}
	–	5338,2	5_{-5} — 4_{0}
	–	5338,3	5_{0} — 5_{1}
91	5339,6	5339,7	1_{1} — 1_{0}
	–	5340,8	6_{1} — 6_{2}
92	5341,6	5341,6	3_{1} — 3_{0}
	–	5342,0	6_{-1} — 7_{-6}
93	5343,9	5344,0	4_{1} — 4_{2}
	–	5345	3_{2} — 3_{3}
	–	5345,1	3_{3} — 3_{2}
	–	5345,3	4_{2} — 4_{1}
94	5346,4	5346,5	5_{1} — 5_{0}
95	5347,3	–	–
	–	5349,4	5_{2} — 5_{3}
	–	5349,7	5_{3} — 5_{2}
96	5351,3	5350,8	2_{0} — 2_{-1}
97	5352,4	–	–
98	5353,9	–	–
	–	5354,9	4_{0} — 4_{-1}
	–	5355,4	3_{3} — 4_{-2}
99	5355,6	5355,6	4_{3} — 4_{4}
	–	5355,7	4_{4} — 4_{3}
	–	5355,7	6_{4} — 6_{3}
	–	5356,7	1_{-1} — 0_{0}
100	5357,6	5357,1	5_{3} — 6_{-2}
101	5359,9	–	–
102	5362,5	–	–
	–	5364,0	5_{-1} — 5_{-2}
103	5364,8	5365,0	3_{-1} — 3_{-2}
	–	5365,9	6_{-2} — 6_{-3}
	–	5366,3	5_{4} — 5_{5}
	–	5366,4	5_{5} — 5_{4}
104	5367,4	–	–
105	5368,3	–	–
106	5370,6	5371,1	9_{-6} — 10_{-7}
	–	5371,5	9_{-7} — 10_{-8}
107	5372,9	–	–
108	5375,2	–	–
	–	5376	1_{-1} — 1_{0}
109	5376,9	–	–
110	5378,9	5377,7	2_{-2} — 1_{-1}
111	5381,6	–	–
112	5383,9	–	–
	–	5385,4	4_{-2} — 4_{-3}
	–	5385,5	6_{6} — 6_{5}
	–	5385,5	6_{5} — 6_{6}
113	5385,9	5385,7	6_{-1} — 6_{-4}
114	5386,5	5386,1	7_{5} — 7_{4}
	–	5386,1	7_{4} — 7_{5}
115	5387,9	5387,9	2_{0} — 1_{1}
116	5389,7	5389,1	6_{1} — 7_{4}
117	5391,4	–	–
118	5393,7	–	–
119	5396,4	5395,8	3_{-2} — 2_{-1}
	–	5397,9	5_{-3} — 5_{-4}
120	5398,7	–	–
	–	5399,5	2_{1} — 2_{-2}
	–	5399,5	3_{-3} — 2_{-2}
121	5400,4	5400	5_{0} — 6_{-5}
	–	5402,9	7_{6} — 7_{7}
122	5405,4	5405,4	7_{7} — 7_{6}
	–	5405,9	3_{2} — 4_{-3}
	–	5405,9	3_{0} — 2_{1}
123	5406,9	5406,8	5_{2} — 6_{-3}
124	5408,6	–	–
125	5409,5	5409,4	6_{-4} — 6_{-5}
	–	5411,8	3_{1} — 2_{2}
126	5412,7	5412,2	3_{-1} — 2_{0}
	–	5413,5	4_{-5} — 3_{-3}
	–	5414,2	4_{-1} — 4_{-4}
	–	5414,5	9_{7} — 9_{6}
	–	5414,5	9_{6} — 9_{7}
127	5415,7	–	–
128	5419,8	5419,4	7_{-5} — 6_{0}
	–	5419,6	6_{-3} — 6_{-5}
129	5423,6	–	–
	–	5424,6	6_{-1} — 5_{0}

TABLEAU V (*suite*).

	ν (cm⁻¹) observées.	ν (cm⁻¹) calculées.	Transitions.
130.....	5426,5	5427,0	5_{-2} — 5_{-5}
131.....	5428,3	5428,7	8_7 — 8_5
	–	5428,7	8_8 — 8_7
	–	5429,8	4_{-1} — 3_0
132.....	5431,2	5430,9	5_{-4} — 4_{-3}
	–	5432	6_{-5} — 4_{-4}
133.....	5433,6	–	–
	–	5436,8	4_{-2} — 3_{-1}
	–	5436,9	7_{-6} — 6_{-5}
	–	5436,9	7_{-7} — 6_{-6}
134.....	5438,0	–	–
135.....	5439,2	–	–
136.....	5440,7	–	–
	–	5443,1	4_0 — 3_1
	–	5443,4	8_{-7} — 7_{-6}
	–	5443,6	8_{-8} — 7_{-7}
137.....	5445,4	–	–
138.....	5447,8	5447,7	2_2 — 1_{-1}
	–	5448,0	2_1 — 1_{-1}
139.....	5450,8	–	–
	–	5451,9	5_{-2} — 4_{-1}
	–	5452,7	4_1 — 4_{-2}
140.....	5453,2	5453,5	9_{-8} — 8_{-7}
	–	5453,5	9_{-9} — 8_{-8}
	–	5454	9_8 — 9_9
141.....	5454,9	5454	9_9 — 9_8
142.....	5457,3	–	–
	–	5459,5	5_4 — 6_{-1}
	–	5461,2	10_{-10} — 9_{-9}
	–	5461,2	10_{-9} — 9_{-8}
143.....	5462,3	–	–
144.....	5463,3	–	–
	–	5464,3	5_{-1} — 4_0
145.....	5466,0	–	–
146.....	5468,7	–	–
	–	5469,7	6_0 — 5_1
147.....	5471,0	–	–
	–	5471,6	5_2 — 4_3
	–	5471,7	5_3 — 4_4
	–	5472,3	6_{-2} — 5_{-1}
148.....	5472,8	5473	11_{-10} — 10_{-11}
	–	5473	11_{-11} — 10_{-10}
149.....	5478,2	–	–
150.....	5479,8	–	–
151.....	5481,3	5481,0	11_9 — 11_8
	–	5481,0	11_8 — 11_9
	–	5482,4	10_9 — 10_{10}
	–	5482,4	10_{10} — 10_9
152.....	5483,1	–	–
153.....	5487,9	5488,4	3_3 — 3_{-2}
	–	5488,4	6_1 — 5_2
154.....	5490,0	5490,4	6_2 — 5_3
155.....	5491,5	–	–
156.....	5493,9	5494,5	7_{-5} — 7_{-6}
	–	5494,7	7_{-4} — 7_{-7}
157.....	5496,3	5495,8	6_1 — 6_{-2}
158.....	5497,8	–	–
159.....	4499,0	–	–
160.....	5501,8	5502,3	6_4 — 5_5
	–	5502,9	6_3 — 5_4
161.....	5504,5	–	–
162.....	5507,5	–	–
163.....	5509,9	–	–
164.....	5512,1	–	–
165.....	5513,9	5513,7	11_{10} — 11_{11}
	–	5513,7	11_{11} — 11_{10}
	–	5514,5	6_2 — 7_{-7}
	–	5514,7	8_{-6} — 8_{-7}
	–	5514,8	8_{-5} — 8_{-8}
166.....	5518,5	–	–
167.....	5520,9	–	–
168.....	5527,7	–	–
169.....	5526,4	–	–
	–	5528	7_{-4} — 6_{-3}
170.....	5529,8	–	–
171.....	5532,2	–	–
172.....	5534,6	–	–
173.....	5536,2	–	–
174.....	5538,9	5538,2	7_{-5} — 6_{-4}
	–	5540,2	6_4 — 7_{-5}
175.....	5541,7	–	–
176.....	5543,5	–	–
177.....	5544,8	–	–
178.....	5546,3	–	–
179.....	5547,9	–	–
180.....	5549,7	5549,5	8_{-5} — 7_{-4}
181.....	5551,2	–	–
	–	5552,5	10_{-8} — 10_{-9}
	–	5552,5	10_{-7} — 10_{-10}
182.....	5553,4	–	–
	–	5554,6	8_{-6} — 7_{-5}
183.....	5556,2	–	–
	–	5557,4	7_4 — 6_5
	–	5557,4	7_5 — 6_6

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau VI.

Ce travail a été fait, grâce aux crédits fournis par le Centre National de la Recherche scientifique,

TABLEAU VI.

	ν_1 (1, 0, 0).	ν_3 (0, 0, 1).	$\nu_2 + \nu_3$ (0, 1, 1).
A............	25,42 cm^{-1}	26,46 cm^{-1}	28,05 cm^{-1}
B............	14,39 »	14,58 »	14,38 »
C............	9,06 »	8,98 »	9,23 »
I_A............	$1,10.10^{-40}$ g : cm^2	$1,06.10^{-40}$ g : cm^2	$0,99.10^{-40}$ g : cm^2
I_B............	1,95 «	1,92 »	1,95 »
I_C............	3,09 »	3,11 »	3,03 »
r............	0,995 Å	0,981 Å	0,987 Å
α............	102°50′	101°31′	105°50′

sous la haute direction de M. J. Lecomte, à qui j'exprime ma gratitude.

J'adresse mes vifs remerciements à M. P. Barchewitz, pour les conseils qu'il m'a donnés et l'aide qu'il m'a apportée.

Manuscrit reçu le 23 juin 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] SLEATOR W. W. — *Astroph. J.*, 1918, **48**, 125.
[2] SLEATOR W. W. et PHELPS E. R. — *Astroph. J.*, 1925, **62**, 28.
[3] PHYLER E. K. et SLEATOR W. — *Phys. Rev.*, 1931, **37**, 1433.
[4] BONNER L. G. — *Phys. Rev.*, 1934, **46**, 485.
[5] MECKE R. — *Z. Physik*, 1933, **81**, 313.
[6] RANDALL H. M., DENNISON D. M., GINSBURG N. et WEBER L. — *Phys. Rev.*, 1937, **52**, 160.
[7] DARLING B. T. et DENNISON D. H. — *Phys. Rev.*, 1940, **55**, 128.
[8] SHAFFER W. H. et NIELSEN H. H. — *Phys. Rev.*, 1939, **56**, 188.
[9] NIELSEN H. H. — *Phys. Rev.*, 1941, **59**, 565.
[10] NIELSEN H. H. — *Phys. Rev.*, 1942, **62**, 422.
[11] MATHIS R., BOSSON F., GAUTHIER G. et LARNAUDIE M. — A paraître au *Journal de Physique*.
[12] SUTHERLAND G. B., BLACKWELL D. E. et FELLGETT P. B. — *Nature*, 1946, **158**, 873.
[13] NELSON R. C. et BENEDICT W. S. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 702.
[14] NELSON R. C. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1949, **39**, 68.
[15] WITMER E. E. — *Proc. Nat. Acad. Amer.*, 1927, **13**, 60.
[16] WANG S. C. — *Phys. Rev.*, 1929, **34**, 243.
[17] KRAMERS H. A. et ITTMANN G. P. — *Z. Physik*, 1925, **53**, 553.
[18] KRAMERS H. A. et ITTMANN G. P. — *Z. Physik*, 1929, **58**, 217; 1930, **60**, 663.
[19] KLEIN O. — *Z. Physik*, 1929, **58**, 730.
[20] ROY B. S. — *Z. Physik*, 1932, **78**, 74.
[21] KING G. W., HAINER R. M. et GROSS P. C. — *J. Chem. Phys.*, 1943, **11**, 27.
[22] DENNISON D. M. — *Rev. Mod. Physics*, 1931, **3**, 280.
[23] HERZBERG G. — Molecular spectra and Molecular Structure. II. Infrared and Raman spectra of Polyatomic molecules (D. Van Nostrand Company, New-York).

LETTRES AUX ÉDITEURS

PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES MAGNÉTITES SUBSTITUÉES PAR LES IONS TRIVALENTS Al^{3+}, EN RELATION AVEC LEUR STRUCTURE

Par Charles GUILLAUD et André MICHEL.

Sommaire. — Nous avons préparé des magnétites substituées par des ions Al^{3+}, nous avons mesuré leur moment à saturation et nous avons constaté que le remplacement d'un ion Fe^{3+} par un ion Al^{3+} entraîne une baisse de $3\mu_B$. Ce résultat s'explique par l'antiparallélisme des moments de spins des ions restant.

Pour préparer ces magnétites on mélange en quantité calculée deux solutions titrées de sel ferrique et de sel d'aluminium. Après précipitation, filtrage et lavage, le mélange d'oxydes est recuit à l'air à 900° pendant 3 h. La réduction s'opère par l'hydrogène à la température la plus basse possible. L'analyse chimique permet par le dosage du fer ferreux et du fer total de suivre la réaction et de contrôler la composition du produit obtenu.

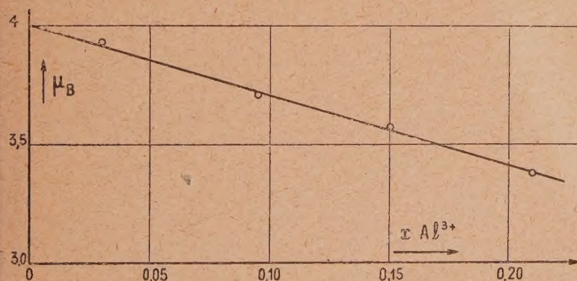
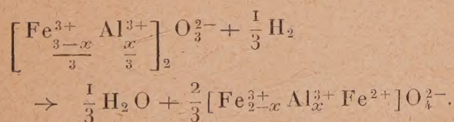


Fig. 1.

La réaction de réduction s'écrit



$$\left[Fe^{3+}_{\frac{3-x}{3}}\,Al^{3+}_{\frac{x}{3}}\right]_2 O_3^{2-} + \frac{1}{3}H_2 \rightarrow \frac{1}{3}H_2O + \frac{2}{3}[Fe^{3+}_{2-x}\,Al^{3+}_x\,Fe^{2+}]O_4^{2-}.$$

Nous avons déterminé par différentes valeurs de x le moment magnétique à saturation (au zéro absolu et pour un champ infini). Nous avons rapporté ce moment à un ion de la molécule.

Le Tableau I donne les résultats de ces mesures jusqu'à des valeurs de x atteignant 0,210, la figure 1 traduit ces résultats.

x...............	0,030	0,095	0,150	0,210
Moment en μ_B...	3,93	3,71	3,57	3,38

On observe une baisse linéaire de moment et l'on constate, par extrapolation, que si l'on remplace un ion Fe^{3+} par un ion Al^{3+} le moment de la magnétite ainsi substituée n'est plus que de $1{,}0\mu_B$ (la pente de la droite tracée est de $-2{,}96\mu_B$).

On peut interpréter ces résultats dans le cadre des hypothèses de L. Néel [1]. Dans la magnétite, le seul moment apparent est celui de l'ion Fe^{2+}; en effet, par suite d'intégrales d'échanges négatives les ions ferriques distribués à égalité dans les cavités octaédriques et tétraédriques ont des moments de spins antiparallèles d'où un moment résultant nul pour ces ions : il n'apparaît donc que le moment de l'ion Fe^{2+} non compensé (le moment de $4{,}0\mu_B$ de la magnétite est en accord avec cette hypothèse).

Quand on remplace un ion Fe^{3+} par un ion Al^{3+}, toujours par suite des interactions négatives les deux ions Fe^{3+} et Fe^{2+} doivent alors avoir un moment résultant de $5 - 4 = 1\mu_B$, c'est bien ce que nous constatons.

Cette hypothèse permet donc une interprétation simple de nos résultats.

[1] Néel L. — *Ann. Phys.*, 1948, **1**, 138.

SUR LES INDICES DES MÉLANGES DE DEUX CORPS TRANSPARENTS EN COUCHE MINCE

Par Yvette BASSET (1),
Laboratoire de l'Électro-aimant, C. N. R. S., Bellevue.

Des mélanges de deux corps transparents peuvent être employés en couches minces, soit pour obtenir un indice de réfraction ayant une valeur déterminée, soit pour réaliser des couches hétérogènes [1]. Il est donc utile de connaître comment varie l'indice de réfraction de telles couches en fonction des indices et des proportions des constituants.

(1) Résumé d'une partie d'un travail exécuté pour le diplôme d'Études supérieures, sous la direction de M. Jacquinot.

Quand on emploie la méthode d'évaporation, il est toujours difficile de connaître la composition du mélange déposé, les deux constituants ne s'évaporant pas de la même façon. Pour bien connaître cette composition, nous avons évaporé simultanément sur un même verre les deux substances pures à partir de deux creusets différents.

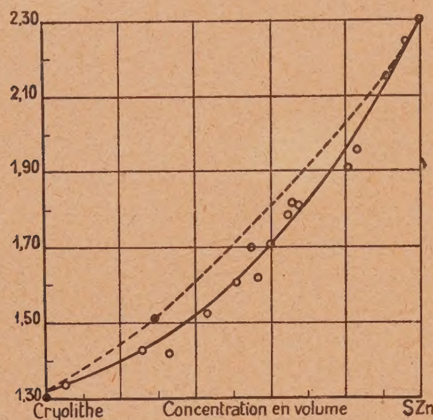


Fig. 1.

Le montage réalisé permettait de déposer le mélange sur une lame de verre L_1, alors que les constituants purs se déposaient chacun sur une moitié d'une autre lame L_2 placée dans une position identique à L_1 par rapport aux deux creusets. En outre, deux verres témoins dont on mesurait la variation de réflectance au cours de l'opération permettaient de régler et de maintenir constantes les deux vitesses d'évaporation.

Après l'opération, l'étude des réflectances des deux plages de L_2 permettait de connaître les épaisseurs optiques déposées pour chacun des constituants, donc la composition du mélange déposé sur L_1. On peut ainsi déterminer la composition avec une incertitude de l'ordre de 5 pour 100.

L'indice de réfraction du mélange était mesuré par la méthode d'Abelès [2] qui consiste à mesurer l'incidence de disparition du contraste entre une plage nue et une plage contiguë recouverte de la substance étudiée : cette incidence n'est autre que l'incidence brewsterienne relative à la substance. L'incertitude est de l'ordre de 0,01 sur n.

Les premières mesures ont porté sur les mélanges de cryolithe ($n = 1{,}32$) et de sulfure de zinc ($n = 2{,}30$). Sur la figure, on a porté les indices de réfraction mesurés en fonction de la composition en volume. Les points présentent une assez grande dispersion attribuable surtout à la difficulté d'obtenir des dépôts de cryolithe bien reproductibles; l'indice des lames de cryolithe pure peut, en effet, varier de 1,28 à 1,34.

On a représenté en trait pointillé les valeurs des indices calculés par la formule de Lorentz-Lorenz.

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\,\frac{1}{d}=\sum\frac{n_i^2-1}{n_i^2+2}\,\frac{c_i}{d_i}$$

(c_i = concentration massique)

à partir des indices $n = 1{,}32$ et $n_2 = 2{,}30$ et en admettant que la densité du mélange est donnée par $d = d_1C_1 + d_2C_2$ (C_i concentration en volume).

La courbe expérimentale moyenne est nettement en dessous de la courbe de Lorentz-Lorenz : on peut interpréter ce fait, en admettant, soit que le mélange n'obéit pas à la loi de Lorentz, soit que la densité du mélange est *inférieure* à celle que donne la formule des mélanges, l'écart moyen maximum obtenu pour la concentration 25 pour 100 de SZn étant de 10 pour 100.

[1] Strong J. — *J. Phys. Rad.*, 1950, **11**, 441.
[2] Abelès F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 553.

SUR LE RAYONNEMENT ÉLECTROMAGNÉTIQUE DES PROTONS COSMIQUES DANS LES CHAMPS MAGNÉTIQUES INTENSES DES OBJETS CÉLESTES

Par Bernard KWAL
(Institut Henri Poincaré).

1. Nous avons indiqué récemment [1] la possibilité d'interpréter l'émission radioélectrique du Soleil et de la Galaxie par le rayonnement électromagnétique des protons des radiations cosmiques dans les champs magnétiques intenses des objets célestes. Ce qui est le plus frappant, lorsqu'on envisage cette supposition, c'est que, pour expliquer le rayonnement observé, il n'est guère nécessaire d'avoir recours à aucune autre hypothèse que celle qui admet la présence des protons cosmiques des énergies connues (de 2.10^3 MeV à plus de 2.10^4 MeV) dans les régions où règnent les champs magnétiques d'intensités également connues (pouvant atteindre 4 000 gauss dans les plages actives du Soleil).

Les protons d'énergie E (exprimée en MeV) rayonnent dans un champ magnétique d'intensité H (gauss) sur une fréquence

$$\nu = 2.10^{-3} HE^2 \text{ Mc,} \qquad (1)$$

de sorte que dans un champ de 1000 gauss les protons de 2.10^3 à 2.10^4 MeV doivent rayonner sur les fréquences allant de 4 à 800 Mc et dans un champ de 4 000 gauss, sur quatre fréquences allant de 16 à 3 200 Mc.

2. Pour ce qui est de l'intensité de ce rayonnement, on a approximativement

$$-\frac{dW}{dx} \simeq 0{,}25.10^{-35} H^2 E^2 \text{ erg : cm,} \qquad (2)$$

ce qui nous montre qu'un proton de 2.10^3 MeV, dans un champ de 1000 gauss, rayonne 10^{-23} ergs : cm. Un flux de 10^8 protons : cm^3 rayonnerait donc 10^{-15} ergs : cm^3.s et une couche émissive de 10^5 cm d'épaisseur, 10^{-10} ergs : cm^2.s. Il est donc facile de rendre compte de l'intensité du rayonnement observé.

3. Le rayonnement cosmique qui arrive au sommet

de l'atmosphère présente une distribution énergétique, définie par la relation

$$n(E)\,dE \sim E^{-2,9}\,dE. \qquad (3)$$

En admettant que dans les plages actives, les protons présentent une distribution énergétique analogue, à savoir celle donnée par la formule

$$n'(E)\,dE \sim E^{-s'}\,dE, \qquad (3\,bis)$$

on trouve que dans un champ magnétique d'intensité constante, un faisceau de tels protons rayonne proportionnellement à $E^{-s'+2}\,dE$. Comme la fréquence rayonnée varie comme E^2, il s'ensuit que l'intensité de ce rayonnement doit varier. Comme $\nu^{\frac{1}{2}(-s'+1)}\,d\nu$. Expérimentalement, on trouve une loi en $\nu^{-0,3}\,d\nu$, ce qui conduirait à la valeur 1,6 pour l'exposant s'.

4. Aux vitesses relativistes, comme c'est précisément le cas des protons cosmiques, le rayonnement électromagnétique dans un champ magnétique doit être confinée au voisinage du plan de l'orbite. Ce demi-angle θ d'ouverture, du faisceau émis, est donné par la formule

$$\cos\theta = \frac{c}{v} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{Mc^2}{W}\right)^2}} \qquad (4)$$

qui, dans le cas relativiste extrême, se réduit à

$$\theta \sim \frac{Mc^2}{W}. \qquad (4\,bis)$$

On doit ainsi s'attendre, au cas où l'émission radioélectrique solaire serait due aux protons « cosmiques », à un effet directif, l'émission du rayonnement devant se faire au voisinage du plan perpendiculaire au champ magnétique de la plage active.

Les observations récentes de M. Laffineur, faites à Meudon, seraient favorables à l'existence d'un tel effet.

[1] Kwal B. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **231**, 1057.

REVUE DES LIVRES.

Margenau (H.), **The Nature of Physical, Reality Philosophy of Modern Physics** (*La nature du réel physique. Une philosophie de la Physique Moderne*) (1 vol. 24×16 cm, xiii+479 pages). Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New-York-Toronto, Londres, 1950, 52 S).

L'auteur de cet ouvrage est un physicien bien connu, à qui l'on doit de nombreux travaux dans différents domaines de la physique moderne. Il est professeur de physique et de « philosophie naturelle » à l'Université de Yale, aux États-Unis, et ses travaux de caractère philosophique sur la nature des théories physiques ont fait de lui un des plus éminents épistémologues contemporains. En collaboration avec M. Lindsay, il a écrit, en particulier, un livre sous le titre *Foundations of Physics* où sont exposés d'une manière critique les principales théories et méthodes de la physique théorique. L'ouvrage actuel est un exposé plus simple, plus direct, moins mathématique et davantage philosophique.

Ce livre a été écrit avec la conviction profonde que ceux qui sont engagés dans le développement de la théorie physique peuvent profiter de la réflexion philosophique sur le sens de leurs recherches, et que la physique moderne apporte un message à la philosophie. Ce dernier argument n'est pas nouveau, et, en l'adoptant, l'auteur pénètre avec une certaine timidité sur l'arène où se presse une foule de gladiateurs renommés. Il va donc maintenir son défi. C'est qu'il croit démodées et en désharmonie avec les réussites de la physique contemporaine des attitudes du réalisme non critique, du simple opérationnalisme, et de l'empirisme radical, qui règnent dans la plupart des discussions et la plupart des raisonnements sur les sujets scientifiques. L'auteur commence par analyser *toute* expérience, et pas seulement cette partie périphérique qu'on appelle en termes étroits *connaissance empirique*. Il termine par une épistémalogie qui est à l'unisson aussi bien avec la physique classique qu'avec la théorie des quanta, une philosophie de la science qui permet d'envisager cette discipline nouvelle, réputée hétérodoxe, ce sol nourricier des paradoxes, comme point culminant des méthodes depuis longtemps en usage dans les sciences de la nature... »

Voici en quels termes l'auteur s'exprime dans sa propre préface à l'ouvrage. L'épistémologie que propose l'auteur est d'ailleurs un mélange de l'idéalisme Kantien avec une certaine forme de positivisme, ce qui permet de ménager à la fois le chou et la chèvre! Il est en effet courant de trouver à l'heure actuelle des adeptes de Kant parmi les mathématiciens, tandis que les positivistes se recrutent davantage parmi les expérimentateurs. Comme il est de bon ton aujourd'hui de parler du marxisme, l'auteur lui consacre trois pages dont une à renverser d'une chiquenaude l'imposant édifice de la logique hégélienne! Je ne connais pas suffisamment la philosophie, mais il me paraît abusif de vouloir se débarrasser à si peu de frais d'une doctrine aussi importante que celle de Hegel. A y regarder de près, l'exemple avancé par l'auteur et qui sert de réfutation de la logique dialectique ne me paraît pas juste. Dans la logique dialectique, l'antithèse est la négation de la thèse. Peut-on vraiment assimiler le mouvement qui se rapproche d'une ligne droite donnée à la thèse, le mouvement qui s'en éloigne dans une *autre direction* à l'autre thèse, et enfin le mouvement d'approche sous un angle inférieur au premier à la synthèse ? Tout cela n'a pas l'air très sérieux.

Je n'ai pas saisi non plus la différence entre des concepts et des « constructions » (*constructs*), terme par lequel l'auteur entend les éléments rationnels auxquels correspondent les données expérimentales.

« Un objet extérieur est la plus simple construction qui, habituellement, a le pas sur la plupart des connaissances sensorielles. Les autres sont les formes géométriques, les nombres et la plupart des entités raffinées de la physique moderne. L'invention d'une construction n'amène pas avec elle l'assurance que celle-ci soit scientifiquement acceptable ou fasse partie de la réalité.

Je me demande en quoi consiste la différence entre la construction et un concept au sens de Kant (Cf. *Méthodologie transcendantale*, Ire Section, dans la *Critique de la Raison Pure*).

Au début du chapitre consacré aux « exigences méta-

physiques des constructions », l'auteur écrit qu'au début du XXe siècle l'habitude s'est créée parmi les chercheurs de rapporter les données expérimentales aux modèles mécaniques. « Ici on était sur un sol plus ferme, car Poincaré a montré ou est censé avoir montré que *tout* (souligné par l'auteur) phénomène était réductible à une sorte de modèle. Aucun doute sérieux n'a surgi sur ce point jusqu'à l'apparition de Heisenberg et Dirac; mais les modèles ont été abandonnés en électrodynamique et en optique avant que les découvertes décisives de la mécanique quantique eussent étaient faites. Il est clair que cet abandon n'a pas été rendu nécessaire par des nouveaux faits expérimentaux; il est intervenu pour des raisons plus subtiles. Et notons que l'attitude du dernier mécaniste, son insistance sur les modèles et ses préférences pour les schémas intuitifs, trouvent leur racine dans le système de ses convictions sur le monde et n'ont pas été dictées par la Nature ».

Au sujet de ces affirmations, deux remarques s'imposent. 1° Poincaré n'a jamais démontré, à ce que je sache, que *tout* phénomène physique est susceptible d'une description mécanique. Dans son introduction célèbre à l'ouvrage *Électricité et Optique*, où se trouvent recueillies les leçons que le grand géomètre consacra pendant le semestre d'été de 1888 à l'exposé des théories de Maxwell, se trouve par contre une démonstration du théorème suivant : « Si un phénomène comporte une explication mécanique complète, il en comportera une infinité d'autres qui rendront également bien compte de toutes les particularités révélées par l'expérience ».

Cela étant, Poincaré ajoute : « Entre toutes ces explications possibles, comment faire un choix pour lequel le secours de l'expérience nous fait défaut ? Un jour viendra peut-être où des physiciens se désintéresseront de ces questions, inaccessibles aux méthodes positives et les abandonneront aux métaphysiciens. Ce jour n'est pas venu; l'homme ne se résigne pas si aisément à ignorer éternellement le fond des choses. Notre choix ne peut donc plus être guidé que par des considérations où la part de l'appréciation personnelle est très grande; il y a cependant des solutions que tout le monde rejettera à cause de leur bizarrerie et d'autres que tout le monde admettra à cause de leur simplicité. En ce qui concerne l'électricité et le magnétisme, Maxwell s'abstient de faire aucun choix. Ce n'est pas qu'il dédaigne systématiquement tout ce que ne peuvent atteindre les méthodes positives; le temps qu'il a consacré à la théorie cinétique des gaz en fait suffisamment foi... »

Si je fais une si longue citation, c'est dans le dessein d'y enchaîner ma seconde remarque. En effet, dans une conférence à la Société Française de Physique, faite en 1912, quelques mois à peine avant sa mort prématurée, ce même Poincaré déclarait :

« Les anciennes hypothèses mécanistes et atomistes ont pris dans ces derniers temps assez de consistance pour cesser presque de nous apparaître comme des hypothèses; les atomes ne sont plus une fiction commode; il nous semble pour ainsi dire que nous les voyons, depuis que nous savons les compter... Les brillantes déterminations du nombre des atomes faites par M. Perrin ont complété ce triomphe. Ce qui entraîne notre conviction, ce sont les multiples concordances entre des résultats obtenus par des procédés entièrement différents... »

Je pense que la comparaison de ces deux textes de Poincaré montre clairement que s'il a adhéré en 1912 à ce qu'il considérait comme contraire aux méthodes positives en 1888, ce n'est pas du tout en vertu des convictions sur le monde, mais bel et bien à la suite des expériences, qui sont venues étayer à cette époque les hypothèses mécanistes. La même constatation pourrait être faite à propos de l'attitude d'Ostwald et de maint autre savant du début du XXe siècle.

Un des derniers chapitres de l'ouvrage est consacré au principe d'exclusion qui, selon l'auteur, a des effets aussi profonds dans le domaine de la mécanique quantique que ceux du principe de relativité en physique classique ! Et l'auteur trouve une similarité entre ces deux principes, à cause du caractère restrictif de leur contenu ! Mais presque tous les principes de la physique ont ce caractère et consistent à opposer un veto (pour employer le terme même de l'auteur) à certaines possibilités conceptuelles que la Nature ignore. Il en est ainsi des principes de moindre action ou de moindre contrainte, des deux principes de la thermodynamique etc. Alors pourquoi choisir le principe de relativité comme terme de comparaison au principe d'exclusion et vouloir hausser celui-ci au même niveau que celui-là ? Le principe de relativité s'applique aussi bien à la mécanique classique qu'à la mécanique ondulatoire, à la théorie d'un corps unique qu'à la théorie des ensembles corpusculaires. Quant au principe d'exclusion, il ne s'applique, à l'intérieur de la mécanique ondulatoire, qu'à une certaine catégorie des corpuscules (à spin demi-entier) et encore dans le cas, où ils se présentent en groupe. Il y a donc plus de différences profondes que d'analogies vraies entre les deux principes en cause.

Voici pour terminer un extrait de la table des matières du livre : 1. Examen préliminaire de la Réalité. — 2. Chemins qui conduisent à la Réalité. — 3. Quelles sont les données immédiates ? — 4. Les écarts à partir de l'immédiat, les constructions. — 5. Les exigences métaphysiques demandées aux constructions. — 6. Confirmations empiriques. — 7. Espace et Temps. — 8. Systèmes observables et états. — 9. La physique du discontinu. — 10. La physique du continu. — 11. Thermodynamique. — 12. Le rôle des définitions dans la science. — 13. Probabilité. — 14. Mécanique statistique. — 15. Réalité : Première esquisse. — 16. La faillite des modèles physiques. — 17. Idées fondamentales de la Mécanique Quantique. — 18. Incertitudes et mesures. — 19. Causalité. — 20. Principe d'exclusion. — 21. Les contours de la Réalité.

B. Kwal.

Bibliothèque technique Philips, Caractéristiques et schémas de montage des tubes récepteurs et amplificateurs. Volume II (1 vol. 23,5 × 15,5 cm, 433 pages, Paris, Dunod, 1949).

Cet ouvrage fait suite à celui déjà paru sur les bases de la technique des tubes de radio. Il contient les données nécessaires à l'utilisation des différents tubes qui ont été construits de 1933 à 1939 et se termine par un grand nombre de schémas de montage de récepteurs et d'amplificateurs.

G. Dupuy.

Bibliothèque technique Philips. Caractéristiques et schémas de montage des tubes récepteurs et amplificateurs. Volume III (1 vol. 23,5 × 15,5 cm, 233 pages, Dunod, Paris, 1949).

Ce livre fait suite au précédent; il décrit les tubes construits en 1940 et 1941.

G. Dupuy.

Le Gérant : Maurice Blondin. 138060 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1951.